# ÉQUIVALENCE DE NON-TERMINAUX

Aut(94) p 85.

Soit $G = (\Sigma, \Gamma, R)$ une grammaire algébrique "pré-propre" c'est-à-dire sans règles de la forme $X \to \varepsilon$.

**Déf** On définit la relation $\equiv$ sur $\Gamma$ par
$$X \equiv Y \iff X \xrightarrow{*} Y \text{ et } Y \xrightarrow{*} X$$

**Pté** $\equiv$ est une relation d'équivalence sur $\Gamma$.

Soit $S \in \Gamma$. On pose $V_0^S = \{S\}$

$$V_{n+1}^S = V_n^S \cup \{ Y \in \Gamma \mid \exists X \in V_n^S,\ (X \to Y) \in R \}$$

**Pté** $V_{\#\Gamma}^S = \{ X \in \Gamma \mid S \xrightarrow{*} X \}$

↳ **Cor** On peut calculer les classes d'équivalence modulo $\equiv$

Preuve Si $X$ est tel que $S \xrightarrow{n} X$ on est sûr que cette dérivation s'écrit en fait $S \to S_1 \to S_2 \to \cdots S_{n-1} \to X$

C'est à dire qu'elle ne fait intervenir que des non terminaux.
Si elle est de longueur $\geq \# \Gamma$, elle fait intervenir deux fois le m̂ terminal et on peut en court-circuiter un bout.

(Penser plus court chemin dans un graphe)

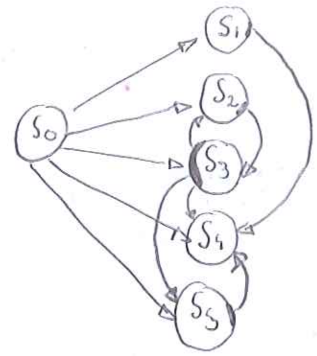
Aut dit $\{ X \in \Gamma \mid S \xrightarrow{*} X \} = \{ X \in \Gamma \mid S \xrightarrow{\leq \#\Gamma} X \}$

or on montre facilem$^t$ par induction réc. que $V_i^S = \{ X \in \Gamma \mid S \xrightarrow{\leq i} X \}$.

Pour calculer la classe d'équivalence de $S$ il suffit de considérer
$$[S] = \{ X \in V_{\#\Gamma}^S \mid S \in V_{\#}^X \}.$$

**ex** $\tilde{G}_p$

$S_0 \to S_1S_2 \mid S_1 \mid S_2 \mid S_3S_4 \mid S_3 \mid S_4 \mid S_5$
$S_1 \to S_1S_1 \mid S_1 \mid S_4$
$S_2 \to aS_2 \mid a \mid S_3$
$S_3 \to S_2 \mid S_4 \mid S_5aS_3 \mid S_5a \mid aS_3 \mid S_5 \mid S_3$
$S_4 \to cS_4 \mid c$
$S_5 \to S_4 \mid b$




$V_0^{S_2} = \{S_2\}$ $\quad V_1^{S_2} = \{S_2, S_3\}$ $\quad V_2^{S_2} = \{S_2, S_3, S_4\}$

En fait on obtient $V^{S_0} = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$
$V^{S_1} = \{S_1, S_4\}$
$V^{S_2} = \{S_2, S_3, S_4\}$
$V^{S_3} = \{S_3, S_2, S_4, S_5\}$
$V^{S_4} = \{S_4\}$
$V^{S_5} = \{S_5, S_4\}$

Les classes d'équivalence pour $\equiv$ sont alors $\{S_0\}$ $\{S_1\}$ $\{S_2, S_3\}$ $\{S_4\}$ $\{S_5\}$

NB: elles correspondent aux composantes fortement connexe ds le graphe ci-dessus.

$\tilde{\tilde{G}}_p$ :

$\bar{S}_0 \to \bar{S}_1\bar{S}_2 \mid \bar{S}_1 \mid \bar{S}_2 \mid \bar{S}_2\bar{S}_4 \mid \bar{S}_4 \mid \bar{S}_5$
$\bar{S}_1 \to \bar{S}_1\bar{S}_1 \mid \bar{S}_1 \mid \bar{S}_4$
$\bar{S}_2 \to a\bar{S}_2 \mid a \mid \bar{S}_2 \mid \bar{S}_4 \mid \bar{S}_5a\bar{S}_2 \mid \bar{S}_5a \mid \bar{S}_5$
$\bar{S}_4 \to c\bar{S}_4 \mid c$
$\bar{S}_5 \to \bar{S}_4 \mid b$

grammaire "quotient" modulo $\equiv$ de $\tilde{G}_p$

**Déf**

On note $\Gamma/_\equiv$ les classes d'équivalences de $\Gamma$.
Plus précisém^t pour $X \in \Gamma$, on note $\bar{X}$ sa classe modulo $\equiv$.
On introduit alors $\varphi$ morphisme de $(\Gamma \cup \Sigma)^*$ vers $(\Sigma \cup \Gamma/_\equiv)^*$
défini par $\begin{cases} \forall a \in \Sigma \ \varphi(a) = a \\ \forall X \in \Gamma, \ \varphi(X) = \bar{X}. \end{cases}$

Alors la grammaire quotient $G/_\equiv = (\Sigma, V/_\equiv, R/_\equiv)$

où $R/_\equiv = \{ \varphi(X) \to \varphi(\omega) \mid (X \to \omega) \in R \}$.

# Pté

Pour tout $S \in \Gamma$, $L_G(S) = L_{G/\equiv}(S)$

Aut. dit la grammaire quotient est équivalente à l'originale

Preuve (1). On montre par récurrence sur $n$ que pour tout $S \in \Gamma$, pour tout $\omega \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$, si $S \xrightarrow[G]{n} \omega$ alors $\varphi(S) \xrightarrow[G/\equiv]{n} \varphi(\omega)$.

- Soient $S \in \Gamma$, $\omega \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$ tels que $S \xrightarrow[G]{1} \omega$, on a alors $(S \to \omega) \in R$ donc $(\varphi(S) \to \varphi(\omega)) \in R/_\equiv$ et donc $\varphi(S) \xrightarrow[G/\equiv]{1} \varphi(\omega)$

- Supposons la pté vraie jusqu'au rang $n$.
Soient $S \in \Gamma$ et $\omega \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$ tels que $S \xrightarrow[G]{n+1} \omega$.
Il existe alors $(\alpha, \beta, \omega) \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$ et $T \in \Gamma$ tels que $S \xrightarrow[G]{n} \alpha T \beta \xrightarrow[G]{1} \alpha \theta \beta = \omega$
Puisque $S \xrightarrow[G]{n} \alpha T \beta$, par $HR_n$, $\varphi(S) \xrightarrow[G/\equiv]{n} \varphi(\alpha T \beta)$
—— $T \xrightarrow[G]{1} \theta$, ——1, $\varphi(T) \xrightarrow[G/\equiv]{1} \varphi(\theta)$

Donc $\varphi(S) \xrightarrow[G/\equiv]{n} \varphi(\alpha T \beta) \underset{\text{car } \varphi \text{ morph.}}{=} \varphi(\alpha)\varphi(T)\varphi(\beta) \xrightarrow[G/\equiv]{1} \varphi(\alpha)\varphi(\theta)\varphi(\beta) \underset{\text{car } \varphi \text{ morph.}}{=} \varphi(\alpha\theta\beta) = \varphi(\omega)$

D'où $\varphi(S) \xrightarrow[G/\equiv]{n} \varphi(\omega)$.

Ainsi la propriété est démontrée par récurrence.

(2) Réciproquem$^t$ on montre par réc. sur $n \geq 1$ que pour tout $S \in \Gamma$ et tout $\omega \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$, si $\varphi(S) \xrightarrow[G/\equiv]{n} \varphi(\omega)$, alors $S \xrightarrow[G]{*} \omega$.

Notez que dans ce sens on ne peut garantir le nombre de dériva°, Aut dit les dériva° sont potentiellem$^t$ plus courtes dans $G/\equiv$.

- Soit $S \in \Gamma$ et $\omega \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$ tel que $\varphi(S) \xrightarrow[G/\equiv]{1} \varphi(\omega)$.
Cela assure que $(\varphi(S) \to \varphi(\omega)) \in R/_\equiv$, et donc par construc° qu'il existe $S' \in \Gamma$, $\omega' \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$ tels que $S' \to \omega' \in R$.
$\varphi(S') = S$
$\varphi(\omega') = \omega$

⚠

Or $\varphi(S') = S$ traduit $S' \equiv S$ donc $S \xrightarrow[G]{*} S'$.
De m̂ $\varphi(\omega') = \omega$ traduit $\forall i \in [1-|\omega|]$ $\omega_i' \equiv \omega_i$, donc $\omega_i' \xrightarrow[G]{*} \omega_i$
En combinant ces dériva° on obtient $\omega' \xrightarrow[G]{*} \omega$.
On a alors $S \xrightarrow[G]{*} S' \xrightarrow[G]{1} \omega' \xrightarrow[G]{*} \omega$ d'où $S \xrightarrow[G]{*} \omega$.

· Soient $S \in \Gamma$ et $w \in (\Sigma \cup \Gamma)^*$ tels que $\varphi(S) \underset{G/\equiv}{\overset{n+1}{\longrightarrow}} \varphi(w)$. On suppose la pté vraie jusqu'au rang $n$.

Il existe $(\alpha, \beta, \theta) \in ((\Sigma \cup \Gamma)^*)^3$, $T \in \Gamma$ tels que $\varphi(S) \underset{G/\equiv}{\overset{n}{\longrightarrow}} \varphi(\alpha)\varphi(T)\varphi(\beta) \overset{1}{\longrightarrow} \varphi(\alpha)\varphi(\theta)\varphi(\beta) = \varphi(w)$

(Rq il existe en fait $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\theta} \in (\Sigma \cup \Gamma/_\equiv)^*$, $\tilde{T} \in \Gamma/_\equiv$ tels que $\varphi(S) \to \tilde{\alpha}\tilde{T}\tilde{\beta} \to \tilde{\alpha}\tilde{\theta}\tilde{\beta} = \varphi(w)$

mais par surjectivité on peut écrire $\tilde{\alpha}$ comme $\varphi(\alpha)$ où $\alpha \in \Gamma \cup \Sigma$. idem pr les autres)

Puisque $\varphi(S) \underset{G/\equiv}{\overset{n}{\longrightarrow}} \varphi(\alpha)\varphi(T)\varphi(\beta) = \varphi(\alpha T \beta)$ on en déduit par $HR_n$ que $S \underset{G}{\overset{*}{\longrightarrow}} \alpha T \beta$.

Puisque $\varphi(T) \underset{G/\equiv}{\overset{1}{\longrightarrow}} \varphi(\theta)$, on a par $HR_1$ que $T \underset{G}{\overset{*}{\longrightarrow}} \theta$

D'où $S \underset{G}{\overset{*}{\longrightarrow}} \alpha T \beta \underset{G}{\overset{*}{\longrightarrow}} \alpha \theta \beta \equiv w$, par déf de $\equiv$ on a aussi $\alpha\theta\beta \to w$

↳ car $\varphi(\alpha\theta\beta) = \varphi(w)$

Finalemt $S \overset{*}{\longrightarrow} w$. D'où la propriété au rang $n+1$.

③ ① et ② nous permettent d'assurer, pour tout $S \in \Gamma$ et tout $w \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$

$$S \underset{G}{\overset{*}{\longrightarrow}} w \quad \text{ssi} \quad \underbrace{\varphi(S)}_{\overline{S}} \underset{G}{\overset{*}{\longrightarrow}} \varphi(w).$$

En particulier pour $w \in \Sigma^*$ et donc tel que $\varphi(w) = w$ on a

$w \in L_G(S)$ ssi $S \underset{G}{\overset{*}{\longrightarrow}} w$ ssi $\overline{S} \underset{G/\equiv}{\overset{*}{\longrightarrow}} \varphi(w) = w$ ssi $w \in L_{G/\equiv}(\overline{S})$ CQFD.

ex

$\overline{S_0} \underset{\tilde{G}_p}{\rightarrow} \overline{S_2} \underset{\tilde{G}_p}{\rightarrow} \overline{S_4} \to c$ et $S_0 \underset{G}{\rightarrow} S_3 \underset{G}{\rightarrow} S_2 \underset{G}{\rightarrow} S_4 \underset{G}{\rightarrow} c$

$\overline{S_0} \to \overline{S_2} \to a\overline{S_2} \to a\overline{S_4} \to ac$ et $S_0 \to S_2 \to aS_2 \to aS_3 \to aS_4 \to ac$