GRAMMAIRE ALGÉBRIQUE

Déf Une grammaire algébrique G est un triplet (Σ, Γ, R) où

- Σ et Γ sont deux ensembles finis de symboles disjoints
- R est une partie finie de $\Gamma \times (\Sigma \cup \Gamma)^*$.

Rq algébrique = non contextuelles

- On dit alors que
  - les éléments de Σ sont les terminaux de G.
  - ______ Γ ______ non-terminaux, ou les variables.
  - ______ R sont les règles de G.

- On notera les terminaux en minuscule
  ______ non-terminaux en majuscule

Si (X, u_1) et $(X, u_2) \in R$ on notera $X \to u_1 \mid u_2$
et on n'en fera par abus qu'une seule règle.

Avec ces notations on pourra sans ambiguïté décrire une grammaire en n'écrivant que les "flèches" de toutes ses règles.

ex

$G_1 = (\Sigma_1, \Gamma_1, P_1)$ où $\Sigma_1 = \{a, b\}$ $\Gamma = \{S\}$

et $P_1 = \{(S, aSb), (S, \varepsilon)\}$

on note alors $G_1 = S \to aSb \mid \varepsilon$

. On peut voir $\to$ comme une rela binaire (non symétrique) et l'étendre aux mots de $(\Sigma \cup \Gamma)$, grâce à la déf inductive

Déf

- $\forall X \in \Gamma$, $\forall \gamma \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$ $X \to \gamma$ ssi $(X, \gamma) \in P$
- $\forall X \in \Gamma$, $\forall (\alpha, \beta, u) \in ((\Gamma \cup \Sigma)^*)^3$ $\alpha X \beta \to \alpha \gamma \beta$ ssi $X \to \gamma$

Cette relation $\to$ correspond aux transforma° en une étape de G.
On veut l'étendre aux transforma° réalisées en un nombre quelconque (év. nul) d'étapes. D'où la rela° $\to^*$ définie par

Déf

$$\{(\alpha,\beta) \mid \alpha \to^* \beta\} = \{(\alpha,\alpha) \mid \alpha \in (\Sigma \cup \Gamma)^*\} \cup \bigcup_{n \geq 1} \{(\alpha,\beta) \mid \alpha \xrightarrow{n} \beta\}$$

où $\alpha \xrightarrow{n} \beta$ ssi il existe γ tq $\alpha \xrightarrow{n-1} \gamma$ et $\gamma \to \beta$.

On appelle $\to^*$ la clôture réflexive transitive de $\to$

Si $u \to^* v$ on dit que u se dérive en v.
$\to^*$ est la rela° de dériva°

⚠ notions évidemment relatives à G.

ex pour $G_1 = S \to aSb \mid \varepsilon$ (sur $\Sigma = \{a,b\}$, $\Gamma = S$)

on a
- $\underbrace{a}_{\alpha}S\underbrace{b}_{\beta} \to \underbrace{a}_{\alpha}\underbrace{aSb}_{\gamma}\underbrace{b}_{\beta}$ car $S \to \underbrace{aSb}_{\gamma}$
- $S \xrightarrow{2} ab$ car $S \to aSb \to ab$
- $S \xrightarrow{n} a^nSb^n$
  $S \xrightarrow{n+1} a^nb^n$

Pté Soient $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ trois mots de $(\Sigma \cup \Gamma)^*$

$\left(\alpha_1\alpha_2 \xrightarrow{k} \beta\right)$ ssi $\left(\begin{array}{l}\text{il existe } (\beta_1,\beta_2) \in ((\Sigma\cup\Gamma)^*)^2 \text{ tq } \beta = \beta_1\beta_2 \\ \text{et } (k_1,k_2) \in \mathbb{N}^2 \text{ tq } \alpha_1 \xrightarrow{k_1} \beta_1 \\ \qquad \alpha_2 \xrightarrow{k_2} \beta_2\end{array}\right)$

Preuve $\Leftarrow$ clair car si $\alpha_1 \xrightarrow{k_1} \beta_1$, $\alpha_2 \xrightarrow{k_2} \beta_2$: $\alpha_1\alpha_2 \xrightarrow{k_1} \beta_1\alpha_2 \xrightarrow{k_2} \beta_1\beta_2$.

$\Rightarrow$ Par réc. Si $\alpha_1\alpha_2 \xrightarrow{1} \beta$, il existe X un nt. apparaissant ds $\alpha_1\alpha_2$ auquel on applique la règle $X \to \xi$ pour trouver β. Aut. dit il existe γ, δ tq $\alpha_1\alpha_2 = \gamma X \delta$ et $\gamma\xi\delta = \beta$.
Si $|\gamma X| \leq |\alpha_1|$ on pose $k_1 = 1$, $k_2 = 0$, $\beta_1 = \gamma\xi$, $\beta_2 = \delta$ sinon on pose $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, $\beta_1 = \gamma$, $\beta_2 = \xi\delta$.

Si $\alpha_1\alpha_2 \xrightarrow{k+1} \beta$ et si la pté est vraie au rg k. Par déf de $\to^{k+1}$ il existe ξ tel que $\alpha_1\alpha_2 \xrightarrow{k} \xi \xrightarrow{1} \beta$. Par HR il existe $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \xi_1, \xi_2$ tq $\alpha_1 \xrightarrow{\tilde{k}_1} \xi_1$ et $\alpha_2 \xrightarrow{\tilde{k}_2} \xi_2$ et $\xi_1\xi_2 = \xi$
et d'après la pté au rg 1, il existe $\hat{k}_1, \hat{k}_2, \beta_1, \beta_2$ tq $\xi_1 \xrightarrow{\hat{k}_1} \beta_1$; $\xi_2 \xrightarrow{\hat{k}_2} \beta_2$ et $\beta_1\beta_2 = \beta$.
[illegible] $k_1 = \hat{k}_1 + \tilde{k}_1$ et $k_2 = \hat{k}_2 + \tilde{k}_2$