1

Schéma d'Euler explicite

Problème : approcher y la solution de l'équation différentielle autonome

$$y' = f(y) \quad \text{avec } y(0) = y_0 \text{ sur } [0,T]$$

avec f lipschitzienne (pour assurer l'existance ac Cauchy)

Définition du schéma On se donne un intervalle de temps $h \in \mathbb{R}^{+*}$

On introduit $(y^k)_{k\in\mathbb{N}}$ défini par $\boxed{y^0 = y_0} = y(0)$

et $\forall k \in \mathbb{N}$ $\boxed{\frac{y^{k+1} - y^k}{h} = f(y^k)}$.

y^k est l'approximation numérique de $y(hk)$.

Pourquoi explicite $\frac{y^{k+1} - y^k}{h} = f(y^k)$ est l'écriture ac quotient differentielle

$y^{k+1} = h f(y^k) + y^k$ est l'écriture explicite

Convergence La méthode d'approximation est convergente

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \left(\max_{k \leq T/h} \| y^k - y(kh) \| \right) = 0$$

Erreur numérique $\forall k \in \mathbb{N}$ $\boxed{e^k = y(hk) - y^k}$

Erreur de consistance $\forall k \in \mathbb{N}$ $\boxed{c^k = \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} - f(y(t_k))}$

où $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} = (kh)_{k\in\mathbb{N}}$.

Théorème La solution numérique du schéma d'Euler explicite converge à l'ordre 1 (en $o(h)$) vers la solution exacte uniformement sur $[0,T]$

lemme $y \in C^2([0,T], \mathbb{R}) \Rightarrow \exists M \in \mathbb{R}^{+*}, \max_{k \leq T/h} \| c^k \| \leq h M$

preuve : Ecrivons le developpement de Taylor de y en t_{k+1} à l'ordre 2.

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \underbrace{(t_{k+1} - t_k)}_{h} \underbrace{y'(t_k)}_{f(y(t_k))} + \underbrace{\frac{(t_{k+1} - t_k)^2}{2}}_{h^2/2} y''(\theta_k) \text{ où } \theta_k \in [t_k, t_{k+1}]$$

donc $\dfrac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} = f(y(t_k)) + \dfrac{h}{2} y''(\theta_k)$

on sait que ça existe car $[0,T]$ est un fermé et y'' continue puisque $y \in C^2$.

donc $c^k = \dfrac{h}{2} y''(\theta_k)$ On pose alors $M = \dfrac{1}{2} \max\limits_{\theta \in [0,T]} \| y''(\theta) \|$

alors on a bien $c^k \leq hM$.

<u>lemme 2</u> $\| e^{k+1} \| \leq (1 + hL) \| e^k \| + h \| c^k \|$ où f est $\underline{L}$-lip

preuve : (A) $y^{k+1} = y^k + h f(y^k)$ ← relation explicite

(B) $y(t_{k+1}) = y(t_k) + h f(y(t_k)) + h c^k$ ↔ relation de consistance.

(B-A) $e^{k+1} = e^k + h \left(f(y(t_k)) - f(y^k) \right) + h c^k$

or f est lipschitzienne. Soit L le coeff tel que f soit L-lpz

on a alors $\| f(y(t_k)) - f(y^k) \| \leq L \| y(t_k) - y^k \| \leq L \| e^k \|$

Donc $\| e^{k+1} \| \leq \| e^k \| + hL \| e^k \| + h \| c^k \|$ CQFD.

<u>"lemme 3"</u> $\| e^k \| \leq C h$ où C est une constante.

pr k assez grd

$$\| e^k \| \leq \| e^{k-1} \| (1 + hL) + h \| c^{k-1} \|$$

$$\leq \left(\| e^{k-2} \| (1+hL) + h \| c^{k-2} \| \right) (1 + hL) + h \| c^{k-1} \|$$

$$\leq (1+hL)^2 \| e^{k-2} \| + (1 + hL) h \| c^{k-2} \| + h \| c^{k-1} \|$$

en généralisant

$$\leq (1+hL)^p \| e^{k-p} \| + h \sum_{i=1}^{p} (1+hL)^{i-1} \| c^{k-i} \|$$

ac $p = k$

$$\leq \cancel{(1+hL)^k \| e^0 \|} + h \sum_{i=1}^{k} (1+hL)^{i-1} \| c^{k-i} \|$$

$=0$ car $e^0 = y_0 - y_0 = 0$

ac $j = k - i$

$$\leq \frac{h}{(1+hL)} \sum_{j=0}^{k-1} (1+hL)^{k-j} \underbrace{\| c^j \|}_{\leq hM} \leq \frac{h^2 M}{(1+hL)} \sum_{j=0}^{k-1} (1+hL)^{k-j}$$

or $hL \geq 0$ donc $(1+hL) \leq \exp^{hL}$ (car $\forall x \in \mathbb{R}^+ \ (1+x) \leq e^x$)

donc $\forall j \in [0..k[\quad (1+hL)^j \leq (1+hL)^k \leq (\exp^{hL})^k = (\exp^L)^{hk} \leq \exp^{LT}$ car $k \leq \frac{T}{h}$

donc $\| e^k \| \leq \dfrac{h^2 M}{(1+hL)} k \times \exp^{LT} = \dfrac{(hk) \exp^{LT}}{(1+hL)} \times h \leq \boxed{\dfrac{T \exp^{LT}}{(1+hL)}} \times h$

est C

Pour conclure on dit $\max\limits_{k \leq \frac{T}{h}} \| e^k \| \leq C h$ où C est cst

donc $\lim\limits_{h \to 0} \max\limits_{k \leq \frac{T}{h}} \| e^k \| = 0$ en $O(h)$. (on prend le max des $\| e^k \|$ parce qu'on s'intéresse à l'erreur sur $[0,T]$ entier pas seulement en t_k)

cf déf de cv.