10.

Théorème de Borel-Lebesgue

10.1 Théorème de Lebesgue

Soit (X,d) un espace métrique. Soit $A \in \mathcal{P}(X)$. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts

$\left.\begin{array}{l} \cdot A \text{ est compacte} \\ \cdot A \subset \bigcup_{i\in I} U_i \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in A, \exists i \in I, \mathcal{B}(x,\alpha) \subset U_i$

Démonstration On suppose que A est compacte et que $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$.

Si $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists x \in A, \forall i \in I, \mathcal{B}(x,\varepsilon) \not\subset U_i$ on peut, puisque $\forall n \in \mathbb{N}\ \frac{1}{n+1} \in \mathbb{R}^{+*}$, construire $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in I, \mathcal{B}(a_n, \frac{1}{n+1}) \not\subset U_i$. (1)

En tant que suite d'éléments de A compacte, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $a \in A$ pour valeur d'adhérence. Puisque $a \in \bigcup_{i\in I} U_i$ il existe $i_0 \in I$, $a \in U_{i_0}$.
et U_{i_0} étant ouvert il existe $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ tq $\mathcal{B}(a, \varepsilon_0) \subset U_{i_0}$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet a pour valeur d'adhérence donc il existe $n \geq 2/\varepsilon_0$ tel que $d(a_n, a) \leq \varepsilon_0/2$. Puisque $\frac{1}{n+1} \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$ $\mathcal{B}(a_n, \frac{1}{n+1}) \subset \mathcal{B}(a_n, \varepsilon_0/2)$.

$\forall y \in \mathcal{B}(a_n, \varepsilon_0/2)$ $d(y,a) \leq d(y, a_n) + d(a_n, a) \leq \varepsilon_0/2 + \varepsilon_0/2 \leq \varepsilon_0$ donc $y \in \mathcal{B}(a, \varepsilon_0)$.

Donc $\mathcal{B}(a_n, \varepsilon_0/2) \subset \mathcal{B}(a, \varepsilon_0) \subset U_{i_0}$ donc $\mathcal{B}(a_n, \frac{1}{n+1}) \subset U_{i_0}$.

Ce qui nie (1) c'est à dire la manière dont on a construit a_n.

IMPOSSIBLE, Donc $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in A, \exists i \in I, \mathcal{B}(x, \alpha) \subset U_i$

10.2 Théorème de Borel-Lebesgue

Soit (X,d) un espace métrique. Soit $A \in \mathcal{P}(X)$.

$\underbrace{A \text{ est compacte}}_{(A)} \Leftrightarrow$ "De tout recouvrement de A par des ouverts on peut extraire un sous recouvrement fini" (B)

Démonstration

- Supposons A et non B. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts recouvrant A.

D'après le théorème de Lebesgue il existe $r \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\forall x \in A, \exists i \in I\ \mathcal{B}(x,r) \subset U_i$

Soit $x_0 \in A$. Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose avoir construit $(x_i)_{i\in[0..k]} \in A^{k+1}$ tq $\forall (i,j) \in [0..k]^2\ i \neq j \Rightarrow d(x_i, x_j) \geq r$

Il existe alors $(i_j)_{j\in[0..k]}$ tel que $\forall j \in [0..k]$ $\mathcal{B}(x_j, r) \subset U_{i_j}$. Donc $\bigcup_{j=0}^{k} \mathcal{B}(x_j, r) \subset \bigcup_{j=0}^{k} U_{i_j}$

Et puisque $\bigcup_{j=0}^{k} U_{ij}$ ne peut être un recouvrement de A on en déduit que $A \not\subset \bigcup_{j=0}^{k} \mathcal{B}(x_j, r)$. Il existe donc $x_{k+1} \in A \setminus \bigcup_{j=0}^{k} \mathcal{B}(x_j, r)$.
Par récurrence on construit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A, tous à distance au moins r les uns des autres. Cette distance implique en particulier qu'aucune sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut être de Cauchy, et donc aucune sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger : on aurait alors une suite d'éléments d'un compact qui n'admet pas de valeurs d'adhérence. IMPOSSIBLE. donc $\boxed{A \Rightarrow B}$.
(ou non B ⇒ non A puisqu'on a montré A et non B incompatible)
• Supposons non A. Il existe alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A n'admettant pas de valeurs d'adhérence. Donc $\forall a \in A, \exists \varepsilon(a)$, tq $\mathcal{B}(a, \varepsilon(a))$ ne contient qu'un nombre fini de termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
$A \subset \bigcup_{a\in A} \mathcal{B}(a, \varepsilon(a))$ donc $(\mathcal{B}(a, \varepsilon(a)))_{a\in A}$ est donc un recouvrement d'ouverts de A, si on envisage d'extraire un nombre fini de ces ouverts, chacun ne contenant qu'un nombre fini de a_n, leur union ne contiendrait qu'un nombre fini de a_n, et ne saurait donc recouvrir A puisqu'elle ne recouvre même pas $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$. On a donc exhiber un recouvrement d'ouverts de A dont on ne peut extraire de sous-recouvrement fini soit non B. donc <u>non A ⇒ non B</u>
et par contraposée B ⇒ A.