Topologie des sous-espaces vectoriels de dimension finie

Rappel En dimension finie toutes les normes sont équivalentes. cf 39.

101.1 **Pté** Dans un EVN, tout SEV de dim. finie est fermé

Preuve : - Soit E un EVN de dimension finie. Soit F un SEV de E (il est néc. de dim finie).
On considère $(e_i)_{i\in[1..n]}$ une base adaptée à F, i.e. $(e_i)_{i\in[1..k]}$ est une base de F. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers x dans $(E, \| \|_E)$.
Par équivalence des normes on a alors $\|x_n - x\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ce qui implique, puisque $\| \|_\infty$ est le sup des modules des composantes dans notre base, que x_n converge vers x composantes par composante.
En particulier $\forall i \in [k+1..n]$ $x^i = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n^i = \lim\limits_{n\to+\infty} 0$ car $\overset{\forall n\in\mathbb{N}}{x_n \in F}$
donc $x \in F$. D'où <u>F est fermé</u>.

- Soit E un EVN de dimension infinie. Soit F un SEV de E de dimension finie. On considère $x \in F^c$. Dans $\tilde{E} = F \oplus \mathbb{K}x$ qui est de dimension finie on sait que F est fermé donc que $x \in F^c$ implique $d_{\tilde{E}}(x, F) \neq 0$.
(Une caractérisation de l'adhérence étant justem^t l'ens. des points à dist. nulle). Or $d_{\tilde{E}}(x,F) = \inf\limits_{y\in F} \|x-y\|_{\tilde{E}} = \inf\limits_{y\in F} \|x-y\|_E = d_E(x,F)$
car la norme de $\tilde{E}$ est la restriction de celle de E, ou du moins la restriction de $\| \|_E$ à $\tilde{E}$ étant une norme, on a pu choisir celle là pour $\| \|_{\tilde{E}}$.
En réutilisant la caractérisation de l'adhérence comme étant l'ens. des points à distance nulle on a $x \notin \bar{F}$ dans E soit $F^c \subset \bar{F}^c$
donc $\bar{F} \subset F$ donc F est fermé.

⚠ A ne pas se prendre les pieds dans le tapis en disant qu'on a, m̂ en dim ∞, la cv composante par composante ! Cela est faux. On a des contre-exemples dans les séries de Fourier par ex où la série (suite des s. partielles) converge en dehors du SEV de dim ∞ engendré par les $(z \mapsto e^{inz})_{n\in\mathbb{N}}$.

En effet si $f = t \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, e^{int} \neq 0$ et $F = \mathrm{Vect}\{t \mapsto e^{int} \mid n\in\mathbb{Z}\}$, en considérant $E = F \oplus \mathbb{K}f$ on a la dernière composante de f égale à 1, alors que chaque terme de la suite des sommes partielles a une dernière composante nulle. De plus cette propriété de cv. comp. par comp est fausse sinon on démontrerait que tt SEV, m̂ de dim ∞, est fermé !

101.2 **Pté** En dimension infinie, un SEV de dim finie est d'intérieur vide.

Preuve Soit E un EVN de dimension infinie.

Soit F un SEV de E de dimension finie.

Il existe nécessairement $u \in E \setminus F$.

Soit $x \in F$. $\forall r \in \mathbb{R}^{+*}$ $\begin{cases} x + \dfrac{r}{\|u\|}\, u \in \mathcal{B}(x,r) \\ \notin F \quad \text{car } u \notin F \text{ et } x \in F. \end{cases}$

Donc $\forall r \in \mathbb{R}^{+*}$, $\mathcal{B}(x,r) \cap F^c \neq \emptyset$.

Donc x n'est pas un point intérieur à F.

D'où $\mathrm{int}(F) = \emptyset$.