Théorème de représentation de Riesz

Hirsch / Lacombe p 96.

Soit H un espace de Hilbert.
On note $\langle \, | \, \rangle$ son produit scalaire et $\| \; \|_H$ la norme euclidienne associée.
On note H' son dual topologique, muni de $\| \; \|_{H'}$ norme subordonnée à $\| \; \|_H$.

106.1 **Pté** $\Phi = \begin{pmatrix} H \longrightarrow H' \\ y \longmapsto \langle \cdot | y \rangle \end{pmatrix}$ est surjective

Preuve : Soit $\varphi \in H'$ non nulle.
Puisque φ est continue, $\operatorname{Ker}\varphi$ est fermé, et appliquant 105.3 à ce SEV fermé on obtient la décomposition $H = \operatorname{Ker}\varphi \oplus \operatorname{Ker}\varphi^{\perp}$
φ étant une forme linéaire non nulle, $\operatorname{Ker}\varphi$ est de codimension 1, donc $\operatorname{Ker}\varphi^{\perp}$ est de dimension 1, on l'écrit alors $\operatorname{Ker}\varphi^{\perp} = \operatorname{Vect}(e)$ où l'on a choisi e de norme 1. Alors on a aussi $\operatorname{Ker}\varphi = \{e\}^{\perp}$.
On pose $y = \overline{\varphi(e)}\, e$. Soit $x \in H$. On l'écrit $x_1 + x_2$ où $\begin{cases} x_1 \in \{e\}^{\perp} \\ x_2 = \lambda e. \end{cases}$
Alors
$$\begin{aligned}
\langle x | y \rangle &= \langle x_1 | \overline{\varphi(e)}\, e \rangle + \langle x_2 | \overline{\varphi(e)}\, e \rangle \\
&= \varphi(e) \underbrace{\langle x_1 | e \rangle}_{=0} + \varphi(e) \langle \lambda e | e \rangle \\
&= \lambda \varphi(e) \times \underbrace{\|e\|}_{=1} \\
&= \varphi(\lambda e) + 0 \\
&= \varphi(x_2) + \varphi(x_1) \quad \text{car } x_1 \in \{e\}^{\perp} = \operatorname{Ker}\varphi \\
&= \varphi(x_2 + x_1) \\
&= \varphi(x).
\end{aligned}$$
Ceci étant vrai pour x quelconque on en déduit $\varphi = \langle \cdot | y \rangle = \Phi(y)$.
D'où la surjectivité de φ.

106.2 Rq Ce résultat est ce qu'on appelle le th. de représentation de Riesz.
La surjectivité de Φ est à comprendre comme l'assurance qu'une forme linéaire quelconque, n'est en fait que le produit scalaire par un certain vecteur. Le ~~t~~ vecteur "représente" alors la forme linéaire.

106.3 **Cor** Φ est une isométrie bijective anti-linéaire.

<u>Preuve</u> Le caractère anti-linéaire de Φ découle directement de l'anti-linéarité du produit scalaire en sa deuxième variable. Puisqu'on vient de montrer la surjectivité et que l'injectivité est automatique pour les isométries, il ne reste qu'à montrer que Φ est une isométrie, c-à-d qu'elle préserve la norme.

Soit $y \in H$.

- $\Phi_y\left(\frac{y}{\|y\|_H}\right) = \langle \frac{y}{\|y\|_H} | y \rangle = \frac{\|y\|_H^2}{\|y\|_H} = \|y\|_H$ or $\left\|\frac{y}{\|y\|}\right\|_H = 1$

  donc $\|\Phi_y\|_{H'} \geq \|y\|_H$.

- $\forall x \in B_H(0,1)$ $\Phi_y(x) = \langle x | y \rangle \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|x\|_H \|y\|_H \leq \|y\|_H$

  donc $\|\Phi_y\|_{H'} \leq \|y\|_H$

D'où $\|\Phi_y\|_{H'} = \|y\|_H$. $\square$