Norme strictement convexe

Soit E un $\mathbb{R}$-EV. Soit $\| \ \|$ une norme sur E

110.1 **Déf** On dit que $\| \ \|$ est une norme strictement convexe si

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad \left.\begin{array}{l} \|x\| = \|y\| \\ x \neq y \end{array}\right\} \Rightarrow \forall \lambda \in]0,1[\quad \|\lambda x + (1-\lambda) y\| < \underbrace{\lambda \|x\| + (1-\lambda)\|y\|}_{\|x\|.}$$

110.2 **Pté** $\| \ \|$ est strict. convexe $\Leftrightarrow \forall (x,y) \in E^2_{\setminus\{0\}} \quad \|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^+, x = \lambda y$. ☆

$\Leftrightarrow$ "les cas d'égalités de l'inégalité triangulaire relèvent de couples de vecteurs positivement liés"

Preuve $\Leftarrow$ Supposons ☆

Considérons x et y de m̂ norme et différents.

Néc x et y ne sont pas positivement liés.

Et même pour $\lambda \in]0,1[$, λx et $(1-\lambda) y$ ne sont pas positivement liés, donc d'après ☆ l'inégalité triangulaire est stricte, soit $\|\lambda x + (1-\lambda) y\| < \|\lambda x\| + \|(1-\lambda) y\| = \lambda \|x\| + (1-\lambda)\|y\|$.

Donc $\| \ \|$ est bien strictem^t convexe

$\Rightarrow$ Réciproquement supposons $\| \ \|$ strictement convexe.

Considérons x et y tels qu'on ait un cas d'égalité c-à-d tq $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$.

On pose $x' = \frac{x}{\|x\|}$ et $y' = \frac{y}{\|x\|}$ (donc $\|x'\| = 1$ et $\|y'\| = \frac{\|y\|}{\|x\|}$)

Ainsi on est ramené au cas où "$\|x\| = 1$" puisqu'on a

$$\|x' + y'\| = \frac{1}{\|x\|} (\|x + y\|) = \frac{1}{\|x\|} (\|x\| + \|y\|) = 1 + \frac{\|y\|}{\|x\|} = \|x'\| + \|y'\|.$$

Par l'absurde supposons que x et y ne sont pas positivem^t liés et que donc x' et y' non plus, autrem^t dit que $x' \neq \frac{y'}{\|y'\|}$.

On a alors 2 vecteurs $\neq$ et de m̂ norme, on peut leur appliquer la pté de la norme st. convexe pour $\lambda \in]0,1[$,

$\left\| \lambda x' + (1-\lambda) \frac{y'}{\|y'\|} \right\| < \|x'\| = 1$. Comme $\|y'\| = \|x' + y'\| - \|x'\|$

$= \|x' + y'\| - 1$

On peut poser $(1-\lambda) = \dfrac{\|x'+y'\|-1}{\|x'+y'\|} \in]0,1[$ $\left(\text{et } \lambda = \dfrac{+1}{\|x'+y'\|}\right)$

On obtient alors $\left\| \dfrac{x'}{\|x'+y'\|} + \dfrac{\|x'+y'\|-1}{\|x'+y'\|} \times \dfrac{y'}{\|y'\|} \right\| < 1$

soit $\dfrac{1}{\|x'+y'\|} \|x'+y'\| < 1$ ABSURDE.

D'où x et y sont positivem^t liés et $\|\ \|$ vérifie ☆

110.3 Cor $\|\ \|$ euclidienne $\Rightarrow$ $\|\ \|$ strictement convexe

Preuve On se contente de MQ $\|\ \|$ euclidienne $\Rightarrow$ $\|\ \|$ vérifie ☆

Soit $\langle\cdot|\cdot\rangle$ le produit scalaire associé à $\|\ \|$.

non nuls Si x et y vérifient un cas d'égalité $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$

on a $\|x+y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 = 2\|x\|\,\|y\| + \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Par ailleurs $\|x+y\|^2 = \langle x+y | x+y \rangle = \langle x|x\rangle + \langle y|y\rangle + 2\langle x|y\rangle$

$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x|y\rangle$.

L'égalité dans l'inégalité triangulaire se ramène donc au cas d'égalité dans Cauchy-Schwartz : on a $\langle x|y\rangle = \|x\|\,\|y\|$.

Or on sait que cela implique que x et y sont liés. et même positivement liés puisqu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $x = \lambda y$

et qu'on a $\langle x|y\rangle = \langle x|\lambda x\rangle = \lambda\langle x|x\rangle = \lambda\|x\|^2$

$\|x\|\,\|y\| = \|x\|\,\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|^2$

donc $\lambda = |\lambda|$ soit $\lambda \geq 0$.

110.4 Pté $\|\ \|$ strictement convexe $\Leftrightarrow$ les sphères n'ont pas de segments

$\Leftrightarrow$ la sphère unité n'a pas de segment

Preuve $\Rightarrow$ Si une sphère $\mathcal{S}$ admet un segment en considérant x et y les extrémités de ce segment on a $\|x\| = \|y\|$ (c'est le rayon de $\mathcal{S}$) et $x \neq y$, pourtant $\forall \lambda \in]0,1[$,

$\|\lambda x + (1-\lambda) y\| = \|x\|$ puisque $\lambda x + (1-\lambda) y \in \mathcal{S}$.

Donc $\| \ \|$ n'est pas strictement convexe et par la contraposée on a bien $\Rightarrow$.

$\Leftarrow$ Réciproquement si $\| \ \|$ n'est pas strictement convexe il existe $(x,y) \in E^2$ tel que $\|x\| = \|y\|$; $x \neq y$ et il existe $\lambda \in]0,1[$ tel que $\|\lambda x + (1-\lambda) y\| = \|x\|$. Autrement dit il existe $z \in [x,y]$ tel que $\|z\| = \|x\| = \|y\| =: r$

S'il existe $u \in]x,z[$ tel que $\|u\| \neq r$.
L'inégalité triangulaire assure que $\|u\| \leq r$ donc ici $\|u\| < r$.
De même pour $v \in]z;y[$ on a l'alternative $\|v\| < r$ ou $\|v\| = r$.
Si pour tous les $v \in]z,y[$ $\|v\| = r$, on a $[z,y]$ un segment sur la sphère de rayon r. Sinon il existe $v \in]z,y[$ tel que $\|v\| < r$, et alors il existe $\lambda \in]0,1[$ tel que $z = \lambda u + (1-\lambda) v$.
(En prenant $\lambda = \frac{\|u-z\|}{\|u-v\|}$ et $(1-\lambda) = \frac{\|z-v\|}{\|u-v\|}$)
Alors l'inégalité triangulaire donne $\|z\| \leq \lambda \underbrace{\|u\|}_{<r} + (1-\lambda) \underbrace{\|v\|}_{<r} < r$.
ABSURDE ! Donc pour tout $u \in]x,z[$ $\|u\| = r$, et alors $[x,z]$ est un segment de la sphère de rayon r.