112.0

## $\alpha$- Convexité

Soit $H$ un espace de Hilbert de p.s $\langle \cdot | \cdot \rangle$ et de norme euclidienne associée $\| \ \|$. Soit $f \in \mathcal{F}(H, \mathbb{R} \cup \{+\infty\})$
Soit $g \in$ ______ .

112.1 **Déf** Pour $\alpha \in \mathbb{R}^+$, on dit que $f$ est $\alpha$- convexe ssi
$$\forall (x,y) \in H^2, \forall \lambda \in ]0,1[, \ f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - \frac{\alpha}{2} \lambda (1-\lambda) \|x-y\|^2$$

112.2 **Pté** (a) • Si $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^+)^2$ avec $\alpha \leq \beta$ alors $f$ $\beta$-cvx $\Rightarrow f$ $\alpha$-cvx

(b) • $f$ $0$-cvx $\Leftrightarrow f$ cvx

(c) • $f$ $\alpha$-cvx avec $\alpha \geq 0 \Rightarrow f$ cvx

(d) • $f$ $\alpha$-cvx avec $\alpha > 0 \Rightarrow f$ strictement cvx ⚠ réc fausse cf après

Preuve: a) Par définition en remarquant que $\alpha \leq \beta$ implique $-\beta \leq -\alpha$.
b) Avec $\alpha = 0$ le terme "quadratique" disparaît, on retrouve la définition de la continuité
c) Par a $f$ $\alpha$-cvx ac $\alpha \geq 0 \Rightarrow f$ $0$-cvx $\overset{(b)}{\Leftrightarrow} f$ cvx.
d) Si $x \neq y$ et $\alpha > 0$, alors $\frac{\alpha}{2} \lambda (1-\lambda) \|x-y\|^2$ est $< 0$ donc
$f(\lambda x + (1-\lambda) y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$, ce pour tout $\lambda \in ]0,1[$.
On retrouve la déf. de stricte convexité

112.3 **Pté** $f$ est $\alpha$ - convexe $\Leftrightarrow f - \frac{\alpha}{2} \| \cdot \|^2$ est convexe

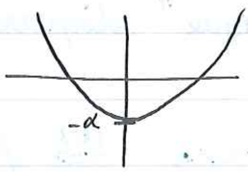
Preuve : On note $g = x \mapsto f(x) - \frac{\alpha}{2} \|x\|^2$.
Soit $(x,y) \in H^2$. Soit $\lambda \in ]0,1[$.
On note que $\lambda x + (1-\lambda) y = x + (1-\lambda)(y-x) = y + \lambda (x-y)$, ainsi
$$g(\lambda x + (1-\lambda) y) = f(\lambda x + (1-\lambda) y) - \frac{\alpha}{2} \underbrace{\langle y + \lambda (x-y) | x + (1-\lambda)(y-x) \rangle}_{\cancel{\langle y | x \rangle} + \lambda (\|x\|^2 - \cancel{\langle y | x \rangle}) + \lambda (1-\lambda) \langle x-y | y-x \rangle + (1-\lambda)(\|y\|^2 - \cancel{\langle x | y \rangle})}$$
$$= f(\lambda x + (1-\lambda) y) - \frac{\alpha}{2} (\lambda \|x\|^2 + (1-\lambda) \|y\|^2) + \frac{\alpha}{2} \lambda (1-\lambda) \|y-x\|^2$$

Donc en notant $z = \lambda x + (1-\lambda) y$ on a

$$\underbrace{g(z) - \lambda g(x) - (1-\lambda) g(y)}_{:= A(x,y,\lambda)} = f(z) + \frac{\alpha}{2}\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2 - \cancel{\frac{\alpha}{2}\lambda\|x\|^2} - \cancel{\frac{\alpha}{2}(1-\lambda)\|y\|^2}$$
$$- \lambda\left(f(x) - \cancel{\frac{\alpha}{2}\|x\|^2}\right) - (1-\lambda)\left(f(y) - \cancel{\frac{\alpha}{2}\|y\|^2}\right)$$
$$= f(z) - \underbrace{\left(\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - \frac{\alpha}{2}\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2\right)}_{:= B(x,y,\lambda)}.$$

Ainsi $-g$ cvx $\iff \forall (x,y) \in H^2, \forall \lambda \in ]0,1[, \ A(x,y,\lambda) \leq 0$
$\iff$ ——— $B(x,y,\lambda) \leq 0$
$\iff f$ est $\alpha$-convexe. $\square$

112.4 Rq Cela nous permet de donner facilem^t un contre exemple au réciproque des propriétés (c) et (d).
En effet $f = \begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^4 \end{pmatrix}$ est une f^ à la fois cvx et st cvx ($f'' = x \mapsto 12x^2 > 0$ pr $x \neq 0$) mais elle ne serait $\alpha$-cvx que si $g_\alpha$ l'était, pour $g_\alpha = x \mapsto x^4 - \frac{\alpha}{2}x^2$, or $g_\alpha'' = x \mapsto 12x^2 - \alpha$

$g''$ 


dc

| $-\infty$ | | $-\sqrt{\alpha/12}$ | | $+\sqrt{\alpha/12}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | + | 0 | − | 0 | + | |

Cela montre bien que pour $\alpha > 0$ on n'a aucune chance puisque sur un vois. de 0 la f^ $g_\alpha$ est même concave !

112.5 **Pté** Si $f$ est $\begin{cases} \text{s.c.i} \\ \alpha\text{-convexe} \end{cases}$, alors il existe $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que
$$\begin{cases} f \geq \frac{\alpha}{2}\|\cdot\|^2 - c_1\|\cdot\| - c_2 & \text{(a)} \\ f \geq \frac{\alpha}{4}\|\cdot\|^2 - c_3 & \text{(b)} \end{cases}$$

Rq (b) traduit le fait que l'épigraphe d'une fonction $\alpha$-cvx et sci est "assez convexe" pour rentrer dans l'épigraphe d'une parabole (au sens large)

Rq C'est un corollaire de la pté 112.3

Preuve 1) MQ POUR $f$ CVX ET SCI IL EXISTE $c_1 \in \mathbb{R}^+$, $c_2 \in \mathbb{R}$ TQ $f \geq -c_1 \|\cdot\| - c_2$.

On suppose ici $f$ convexe et semi-continue inferieurement.

Puisque $f$ est convexe, son épigraphe l'est aussi (Cf à compléter)

——— s.ci, ——— fermé (Cf. 89.4).

Ainsi épi$(f)$ est un convexe fermé de $H \times \mathbb{R}$ qui est un espace de Banach comme produit de deux espaces de Banach.

On peut donc lui appliquer le th. de séparation (Cf 114) pour le séparer d'un point $(x_0, t_0) \notin$ épi$(f)$.

Il existe donc $\varphi$ une forme linéaire sur $H \times \mathbb{R}$ et une constante $c \in \mathbb{R}$ telles que $\varphi \geq c_2$ sur épi$(f)$ et $\varphi < c$ en $(x_0, t_0)$.

Quitte à poser $\varphi_1 = \varphi(\cdot, 0)$ et $\varphi_2 = \varphi(0, \cdot)$ on peut écrire $\varphi = (x,t) \mapsto \varphi_1(x) + \varphi_2(t)$ où $\varphi_1 \in H'$ et $\varphi_2 \in \mathbb{R}'$. En particulier puisque $\varphi_2$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}$, elle s'écrit $t \mapsto at$ pour $a \in \mathbb{R}$.

Alors pour $x \in H$, puisque $(x, f(x)) \in$ épi$(f)$, on réécrit $\varphi(x, f(x)) \geq 0$ en $\varphi_1(x) + a f(x) \geq c$ soit $a f(x) \geq -\varphi_1(x) + c$.

Pour aller au delà et conclure il nous faut $a \geq 0$.

Par l'absurde supposons $a < 0$. Puisque $(x_0; t_0) \notin$ épi$(f)$, on sait puisque $f(x_0) > t_0$ et donc $a f(x_0) < a t_0$, et $\underbrace{\varphi_1(x_0) + a f(x_0)}_{\varphi(x_0, f(x_0))} \leq \underbrace{\varphi_1(x_0) + a f(t_0)}_{\varphi(x_0, t_0) < c}$

Or $(x_0, f(x_0)) \in$ épi$(f)$ donc $\varphi(x_0, f(x_0)) \leq c$.

Absurde. D'où $a \geq 0$.

Cela montre aussi $a \neq 0$, en effet si $a = 0$, $\varphi(x_0, f(x_0)) = \varphi(x_0, t_0)$ ABS.

Donc $a > 0$ cela assure qu'on peut diviser par $a$, et ce sans changer le sens de l'inégalité : $\forall x \in H$, $f(x) \geq -\frac{\varphi_1(x)}{a} + \frac{c}{a}$.

or $\varphi_1(x) \leq |||\varphi_1||| \, \|x\|$ donc avec $c_1 = \frac{|||\varphi_1|||}{a} \in \mathbb{R}^+$ et $c_2 = -\frac{c}{a} \in \mathbb{R}$.

on a $\forall x \in H$, $f(x) \geq -c_1 \|x\| - c_2$.

2) TRAITER LE CAS $\alpha$-CONVEXE

Si $f$ est $\alpha$-cvx, alors d'après la pté précédente $f(\cdot) - \frac{\alpha}{2}\|\cdot\|^2$ est cvx.

On peut donc lui appliquer ce que l'on vient de montrer

$\forall x \in H$, $f(x) - \frac{\alpha}{2}\|x\|^2 \geq -c_1\|x\| - c_2$ (pour certaines cst $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$)

alors $\forall x \in H$, $f(x) \geq \frac{\alpha}{2}\|x\|^2 - c_1\|x\| - c_2$. (a)

Pour prouver l'autre inégalité on cherche à se débarrasser du $\|\cdot\|$, l'idée est qu'au "voisinage" de 0, $\|\cdot\|$ est majoré par une constante et qu'au voisinage de $+\infty$, $\|\cdot\|$ est dominé par $\|\ \|^2$.

Supposons ici $\alpha > 0$. $\forall x \in H_{\setminus\{0\}}$ $c_1 \|x\| \leq \frac{\alpha}{4} \|x\|^2$ ssi $c_1 \leq \frac{\alpha}{4} \|x\|$ ssi $\|x\| \geq \frac{4}{\alpha} c_1$.

Si $\|x\| \geq \frac{4}{\alpha} c_1$ alors $-c_1 \|x\| \geq -\frac{\alpha}{4} \|x\|^2$ donc $f(x) \geq \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{4}\right) \|x\|^2 - c_2$

$$\geq \frac{\alpha}{4} \|x\|^2 - c_2 - \underbrace{\frac{4}{\alpha} c_1^2}_{\geq 0}.$$

Si $\|x\| \leq \frac{4}{\alpha} c_1$ alors $-c_1 \|x\| \geq -\frac{4}{\alpha} c_1^2$ donc $f(x) \geq \frac{\alpha}{2} \|x\|^2 - \frac{4}{\alpha} c_1^2 - c_2$

$$\geq \frac{\alpha}{4} \|x\|^2 - \frac{4}{\alpha} c_1^2 - c_2.$$

Ainsi avec $c_3 = c_2 + \frac{4}{\alpha} c_1^2$ on a bien $f(\cdot) \geq \frac{\alpha}{4} \|\cdot\|^2 - c_3$.

On a un autre corollaire de la propriété 112.3, plus direct :

**Pté**
- $f$ est $\alpha$-convexe
- $g$ est convexe

$\Rightarrow$ $f+g$ est $\alpha$-convexe

**Preuve :** $f$ est $\alpha$-cvx donc $f - \frac{\alpha}{2} \|\cdot\|^2$ est convexe. par $\overset{112.3}{\Longrightarrow}$ $g$ est aussi convexe et la somme de deux fonctions convexes est elle m̂ convexe donc $f+g-\frac{\alpha}{2}\|x\|^2$ est convexe, et donc par $\overset{112.3}{\Longleftarrow}$, $f+g$ est $\alpha$-cvx.