Caractérisation de la convexité par les milieux

Soit E un $\mathbb{R}$-EVN. Soit $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R}\cup\{+\infty\})$

Le but est ici de caractériser la convexité non pas par

$\star_1$ $\forall (x,y)\in E^2, \forall \lambda \in]0,1[, f(\lambda x+(1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ qui est la définition mais par la propriété moins forte sur les milieux

$\star_2$ $\forall (x,y)\in E^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

On introduit des notations pour les diadiques :

- $\forall k\in\mathbb{N}, \mathcal{D}_k = \left\{\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{2^i} \mid (a_i)_{i\in[1..k]} \in \{0,1\}^k\right\}$ l'ens des réels de $[0,1[$ admettant une écriture diadique de taille k
- $\mathcal{D} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{D}_k$ = l'ensemble des nombres diadiques de $[0,1[$

On rappelle que $\mathcal{D}$ est dense dans $[0,1[$ (pour la valeur absolue)

113.1 **Pté** | Si f est s.c.i sur E
alors f est convexe ssi $\forall (x,y)\in E^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x)}{2} + \frac{f(y)}{2}$. $\star_2$

Preuve $\boxed{\Rightarrow}$ Le sens est facile puisque f cvx $\Leftrightarrow \star_1 \Rightarrow \star_2$

$\boxed{\Leftarrow}$ On va d'abord traiter les cas $\lambda\in\mathcal{D}$, puis utiliser la s.c.i de f et la densité de $\mathcal{D}$.

1) MQ $\forall \lambda\in\mathcal{D}, \forall (x,y)\in E^2, f(\lambda x+(1-\lambda)y) \le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$.

On montre par réc. sur $k\in\mathbb{N}^*$ la propriété $\forall \lambda\in\mathcal{D}_k, \forall (x,y)\in E, f(\lambda x+(1-\lambda)y) \le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$

- Au rang $k=1$, $\mathcal{D}_1=\{0,\frac{1}{2}\}$. Pour $\lambda=0$, il n'y a rien à vérifier, et pour $\lambda=\frac{1}{2}$ on retrouve l'hypothèse $\star_2$. Donc la pté est vraie au rg 1.
- Soit $k\geq 1$. On suppose la propriété vraie au rang k. Soit $\lambda\in\mathcal{D}_{k+1}$

On peut l'écrire $\lambda = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{a_i}{2^i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{2^i} + \frac{a_{k+1}}{2^{k+1}}$

Si $a_{k+1}=0$, $\lambda\in\mathcal{D}_k$, on conclut grâce à l'hypothèse de réc. (HR).

Supposons donc ici que $a_{k+1}=1$.

Alors $\lambda = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{2^i} + \frac{1}{2^k}\right)}_{:=\beta} + \frac{1}{2}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{2^i}\right)}_{:=\gamma} = \frac{1}{2}(\beta+\gamma)$.

Parallèlement $1-\lambda = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}(1-\beta) + \frac{1}{2}(1-\gamma)$.

Donc $z := \lambda x + (1-\lambda) y$

$$= \frac{1}{2}\beta x + \frac{1}{2}\gamma x + \frac{1}{2}(1-\beta) y + \frac{1}{2}(1-\gamma) y$$

$$= \frac{1}{2}\big(\underbrace{\beta x + (1-\beta) y}_{:= z_1}\big) + \frac{1}{2}\big(\underbrace{\gamma x + (1-\gamma) y}_{:= z_2}\big)$$

Donc par $\mathcal{H}_2$ $f(z) = f\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2} f(z_1) + \frac{1}{2} f(z_2)$

Pour utiliser l'hypothèse de récurrence sur z_1, resp z_2, il faut s'assurer que $\beta \in \mathcal{D}_k$, resp $\gamma \in \mathcal{D}_k$. En fait $\gamma \in \mathcal{D}_k$ est évident vu son écriture, mais β vaut potentiellement 1, si $(a_i)_{i \in [1..k]} \equiv 1$.

Dans ce cas $\begin{cases} f(z_1) = f(1x) = f(x) \\ f(z_2) \leq \gamma f(x) + (1-\gamma) f(y) \end{cases}$

Donc $f(z) \leq \frac{1}{2} f(x) + \frac{\gamma}{2} f(x) + \frac{1-\gamma}{2} f(y)$

$$= f(x)\,\big[\underbrace{\beta/2 + \gamma/2}_{:= \lambda}\big] + f(y)\,\big[\underbrace{(1-\beta)/2 + (1-\gamma)/2}_{:= 1-\lambda}\big] \qquad \begin{matrix} \beta = 1 \\ 1-\beta = 0 \end{matrix}$$

A l'inverse si $(a_i)_{i \in [1..k]} \not\equiv 1$, l'un des $a_i = 0$ et est donc capable d'absorber la retenue induite par l'addition de $\frac{1}{2^k}$ à $\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{2^i}$.

Ainsi $\beta \in \mathcal{D}_k$ et on peut aussi lui appliquer l'HR.

Ici $\begin{cases} f(z_1) \leq \beta f(x) + (1-\beta) f(y) \\ f(z_2) \leq \gamma f(x) + (1-\gamma) f(y) \end{cases}$ donc $f(z) \leq f(x)\,\big[\underbrace{\beta/2 + \gamma/2}_{\lambda}\big] + f(y)\,\big[\underbrace{\tfrac{1-\beta}{2} + \tfrac{1-\gamma}{2}}_{(1-\lambda)}\big]$

Donc la propriété est vraie au rang k.

Ainsi par récurrence, $\underbrace{\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall \lambda \in \mathcal{D}_k}_{\text{donc } \forall \lambda \in \mathcal{D}}$, $\forall (x,y) \in E^2$, $f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

2) PASSER DE $\mathcal{D}$ À $]0,1[$.

Soit $\lambda \in]0,1[$. Par densité de $\mathcal{D}$ dans $[0,1[$, il existe $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lambda_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \lambda$; ainsi pour $(x,y) \in E^2$, $\underbrace{\lambda_k x + (1-\lambda_k) y}_{:= z_k} \longrightarrow \underbrace{\lambda x + (1-\lambda) y}_{:= z}$.

Par semi-continuité inférieure de f,

$f(z) \leq \liminf\limits_{k \to +\infty} f(z_k)$ or $\forall k \in \mathbb{N}$, $f(z_k) = f(\lambda_k x + (1-\lambda_k) y) \leq \lambda_k f(x) + (1-\lambda_k) f(y)$ puisque $\lambda_k \in \mathcal{D}$

$$\leq \liminf_{k \to +\infty} \lambda_k f(x) + (1-\lambda_k) f(y)$$

$$= \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

D'où f est convexe.