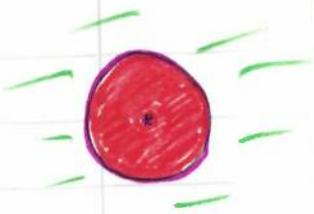
Approcher la frontière d'un convexe

Dans le cadre des théorèmes de séparation dans un Hilbert, on a besoin d'approcher les points de la frontière d'un convexe par des points qui n'appartiennent pas à ce convexe, ni même à son adhérence.
On va montrer ici que pour un ensemble convexe c'est toujours possible (m̄ sans structure hilbertienne), mais notez que pour un ensemble quelconque ce peut être faux

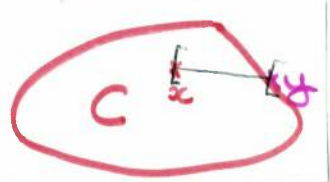
119.1 ex $E = \mathbb{R}^2$, $A = \mathcal{B}(0,1) \setminus \{0\}$. $\bar{A} = \mathcal{B}_f(0,1)$.



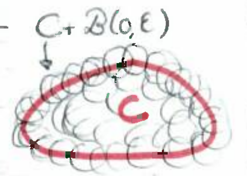
$0 \notin A$ donc $0 \notin \mathring{A}$ et $0 \in \bar{A}$ donc $0 \in Fr(A)$.
Pourtant $\forall x \in \bar{A}^c$; $\|x - 0\| > 1$.
On ne peut donc pas approcher 0, point de la frontière de A, par des points extérieurs à $\bar{A}$.

119.2 **lemme** Soit C un ensemble convexe (de E un $\mathbb{R}$-EVN)

$$\left.\begin{array}{l} x \in \mathrm{int}(C) \\ y \in \mathrm{adh}(C) \end{array}\right\} \Rightarrow [x, y[\subset \mathrm{int}(C)$$



Preuve Soit $z \in [x,y[$. Par définition il existe $\alpha \in]0,1]$ tq $z = \alpha x + (1-\alpha) y$.
Puisque $y \in \bar{C}$, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, $y \in C + \mathcal{B}(0,\varepsilon)$



Donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$
$$\begin{aligned} \mathcal{B}(z,\varepsilon) &= z + \mathcal{B}(0,\varepsilon) \\ &= \alpha x + (1-\alpha) y + \mathcal{B}(0,\varepsilon) \\ &\subset \alpha x + (1-\alpha) C + (1-\alpha)\mathcal{B}(0,\varepsilon) + \mathcal{B}(0,\varepsilon) \\ &\subset \mathcal{B}(\alpha x, (2-\alpha)\varepsilon) + (1-\alpha) C \\ &= \alpha \mathcal{B}(x, \tfrac{2-\alpha}{\alpha}\varepsilon) + (1-\alpha) C. \end{aligned}$$

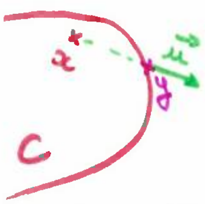
Or puisque $x \in \mathrm{int}(C)$ il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ tq $\mathcal{B}(x, \frac{2-\alpha}{\alpha}\varepsilon) \subset C$.
Alors on a $\mathcal{B}(z,\varepsilon) \subset \alpha C + (1-\alpha) C \subset C$
Donc $z \in \mathrm{int}(C)$. car C convexe.
D'où $[x,y[\subset \mathrm{int}(C)$.

119.3 **Pté** Soit C un convexe (d'un $\mathbb{R}$-EVN E)

$\mathrm{int}(C) \neq \emptyset \Rightarrow \mathrm{front}(C) \subset \mathrm{adh}(\bar{C}^c)$ (où $\bar{C} = \mathrm{adh}(C)$)

(Si $\mathrm{front}(C) = \emptyset$, on n'a rien à montrer)

Preuve Soit $y \in \mathrm{front}(C)$. Par définition $y \in \mathrm{adh}(C)$ et $y \notin \mathrm{int}(C)$.



Puisque $\mathrm{int}(C) \neq \emptyset$, on choisit $x \in \mathrm{int}(C)$ et néc. $\neq y$.
On pose alors $u = \frac{y-x}{\|y-x\|} \neq 0$.
D'après le lemme, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ $y + \varepsilon u \in \bar{C}^c$.
En effet si $y+\varepsilon u$ appartenait à $\bar{C}$, alors $[x, y+\varepsilon u[\subset \mathrm{int}(C)$, soit en particulier $y \in \mathrm{int}(C)$ puisque $y \in [x, y+\varepsilon u[$, or c'est absurde (car $y \notin \mathrm{int}(C)$)

Donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, $\mathcal{B}(y, \varepsilon) \cap \bar{C}^c \neq \emptyset$, ce qui signifie bien $y \in \mathrm{adh}(\bar{C}^c)$.

119.4 **lemme** Soit C un convexe (d'un $\mathbb{R}$-EVN E).

$$\left.\begin{array}{l} x \in \mathrm{ir}(C) \\ y \in \mathrm{adh}(C) \end{array}\right\} \Rightarrow [x, y[\subset \mathrm{ir}(C)$$

Preuve: $\mathrm{ir}(C)$ désigne l'intérieur relatif de C, c-à-d l'intérieur de C dans $A = \mathrm{aff}(C)$ l'espace affine engendré par C.
Puisque C est un convexe du $\mathbb{R}$-EVN A, et que dans A l'intérieur de C est justem^t $\mathrm{ir}(C)$, il suffit d'utiliser le lemme précédent dans l'espace A.

119.5 **Pté** Soit C un convexe (d'un $\mathbb{R}$-EVN E) de dimension finie

$\mathrm{ir}(C) \neq \emptyset \Rightarrow \mathrm{front}(C) \subset \mathrm{adh}(\bar{C}^c)$.

(Si $\mathrm{front}(C) = \emptyset$, on n'a rien à montrer)

Preuve: Soit $y \in \mathrm{front}(C)$. Par définition de la frontière on sait que $y \notin \mathrm{int}(C)$, mais il se peut que $y \in \mathrm{ir}(C)$.

Dans ce cas, il existe $r \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $(\mathcal{B}(y,r) \cap A) \subset C$ où $A = \mathrm{aff}(C)$.
donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, $\varepsilon \leq r \Rightarrow (\mathcal{B}(y,\varepsilon) \cap A) \cap C^c = \emptyset$, pourtant puisque $y \notin \mathrm{int}\, C$, on a $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, $\mathcal{B}(y,\varepsilon) \cap C^c \neq \emptyset$. on en déduit que pour tout $\varepsilon \leq r$, il existe $y_\varepsilon \in \mathcal{B}(y,\varepsilon) \cap C^c \cap A^c$. Clairement $\lim_{\varepsilon \to 0} y_\varepsilon = y$.
De plus puisque $C \subset A$, $\bar{C} \subset \bar{A}$ or $\bar{A} = A$ car c'est un espace affine de dimension finie. Donc $A^c \subset \bar{C}^c$ et on a bien approcher y par des éléments de $\bar{C}^c$.
Dans le cas contraire, on reprend la preuve précédente, à quelques détails près. Si $\mathrm{ir}(C) = \{y\}$, alors nécessairement $A = \{y\}$, sans quoi $\{y\}$ ne pourrait être un ouvert de A. Donc nécessairement $C = \{y\}$, et $\bar{C} = \{y\}$ aussi. Puisque $y \in \overline{(\{y\}^c)}$ (car E ne peut être de dimension 0, sans quoi y serait point interieur, et donc pas sur la frontière !) on a l'inclusion souhaitée. Si $\mathrm{ir}(C) \neq \{y\}$ on choisit $x \in \mathrm{ir}(C) \setminus \{y\}$.
On pose comme précédemment $u = \frac{y-x}{\|y-x\|} \neq 0$. D'après le lemme 119.4 cette fois, on est assuré que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, $y + \varepsilon u \notin \bar{C}$ puisque $y \notin \mathrm{ir}(C)$.
On peut donc approcher y par des points de $\bar{C}^c$ d'où $y \in \mathrm{adh}(\bar{C}^c)$.