12.

Contre-exemple

But Montrons qu'en dimension infinie fermé borné $\not\Rightarrow$ Compact

Introduction On travaille sur $E = \mathbb{R}[X]$ l'ens. des polynômes à coeff réels.

E est de dimension finie.

$$\| \ \|_\infty = \begin{pmatrix} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^+ \\ P \to \sup_{t\in[0,1]} |P(t)| \end{pmatrix}$$

$$\| \ \|_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^+ \\ P \to \int_0^1 |P(t)|\,dt \end{pmatrix}$$

$$\| \ \|_2 = \begin{pmatrix} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^+ \\ P \to \sqrt{\int_0^1 P(t)^2\,dt} \end{pmatrix}$$

On pose $A = \{X^n / n \in \mathbb{N}\}$

MQ A est borné pour $\| \ \|_\infty$ Soit $P \in A$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(X) = X^n$. Donc sur $[0,1]$

$\sup|P(t)| = \sup|t^n| = 1^n = 1$. $\forall P \in A \quad \|P\|_\infty = 1$

Donc A est clairement borné pour $\| \ \|_\infty$

MQ A est fermé pour $\| \ \|_\infty$ Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ une suite qui cv vers $P \in \mathbb{R}[X]$ pour $\| \ \|_\infty$.

On veut MQ $P \in A$.

Il existe $\Phi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n(X) = X^{\Phi(n)}$.

a) Comparons $\| \ \|_2$ et $\| \ \|_\infty$

Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ $\|Q\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |Q(t)|^2 dt} \leq \sqrt{\int_0^1 \|Q\|_\infty^2 dt} = \sqrt{\|Q\|_\infty^2} = \|Q\|_\infty$

Donc $\| \ \|_\infty$ est plus fine que $\| \ \|_2$.

b) Montrons que $\|P_n\|_2 \xrightarrow{n\to+\infty} \|P\|_2$

$|\|P_n\|_2 - \|P\|_2| \leq \|P_n - P\|_2 \leq \|P_n - P\|_\infty$ or par déf de la cv pour $\| \ \|_\infty$ de (P_n) vers P $\|P_n - P\|_\infty \to 0$

D'où $|\|P_n\|_2 - \|P\|_2| \to 0$ soit $\|P_n\|_2 \to \|P\|_2$.

c) Calculer $\|P_n\|_2$ en déduire que Φ est stationnaire

$$\|P_n\|_2^2 = \int_0^1 P_n(t)^2 dt = \int_0^1 t^{2\Phi(n)} dt = \frac{1}{2\Phi(n)+1} \underbrace{\left[t^{2\Phi(n)+1}\right]_0^1}_{=1}$$

• Si $\|P\|_2 = 0$ alors $P = 0$ car $\| \ \|_2$ est une norme.

alors $\|P_n - P\|_\infty = \|P_n\|_\infty = 1 \not\longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$ IMP

• $\|P\|_2 \neq 0$ et on a $\|P\|_2^2 = \lim\limits_{n\to+\infty} \|P_n\|_2^2 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2\Phi(n)+1}$

Donc $\left(2 \lim\limits_{n\to+\infty} \Phi(n) + 1\right) \|P\|_2^2 = 1$

Soit $\lim\limits_{n\to+\infty} \Phi(n) = \left(\frac{1}{\|P\|_2^2} - 1\right) \times \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$.

Ainsi Φ converge, et puisqu'il s'agit d'une suite d'entier elle cv vers un entier et est stationnaire (= à sa lim à partir d'1 certain rg)

Il existe donc un rang à partir duquel $\Phi_n = c$ et $P_n(X) = X^c$.

donc $P = X^c \in A$.

On a bien MQ A est fermé pour $\| \ \|_\infty$.

MQ A n'est pas compact. On pose $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} = (X^n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$.

On veut MQ (P_n) n'admet pas de valeur d'adhérence ds A

a) Comparer $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_\infty$. Soit Q

Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. $\|Q\|_1 = \int_0^1 |Q(t)| dt \leq \int_0^1 \|Q\|_\infty dt = \|Q\|_\infty$. Donc $\| \ \|_\infty$ est + fine que $\| \ \|_1$

b) MQ $P \in A$ est 1 valeur d'adhérence de (P_n) pour $\| \ \|_\infty$ est absurde.

S'il existe un tel P, il existe une extractrice φ tq $(P^{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[\| \ \|_\infty]{} P$

Puisque $\| \ \|_\infty$ est + fine que $\| \ \|_1$ on a aussi $(P^{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[\| \ \|_1]{} P$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}$ $\|P^n\|_1 = \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

donc $\|P^{\varphi(n)}\|_1 = \frac{1}{\varphi(n)+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ aut dit $P^{\varphi(n)} \xrightarrow[\| \ \|_1]{} 0$

Par unicité de la limite $P = 0$ or $0 \notin A$ IMP.

Donc il existe une suite d'elmt de A n'ayant pas de valeur d'adhérence, aut. dit A n'est pas compact.

On a donc exhibé A un fermé borné non compact.