Inverse et série d'endomorphisme

Soit $(E, \| \|_E)$ un espace de Banach.

Soit $(\mathcal{L}(E) \| \|_{\mathcal{L}(E)})$ l'ensemble des applications linéaires continues de E ds E, muni de la norme subordonnée. En y ajoutant comme loi produit la loi de composition on obtient une algèbre de Banach. cf 14.6.

15.1 **Pté** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. $\|u\|_{\mathcal{L}(E)} < 1 \Rightarrow \begin{cases} \bullet \sum_{n=0}^{+\infty} u^n \text{ converge dans } \mathcal{L}(E) \\ \bullet\ Id - u \text{ est inversible} \\ \bullet\ (Id-u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n \end{cases}$

· Rappels utiles (a) $\forall u \in \mathcal{L}(E)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\|u^n\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \|u\|_{\mathcal{L}(E)}^n$

(b) u commute avec $\mathbb{K}[u]$ (polynômes en u) car $\forall k \in \mathbb{N}$ u et u^k commutent.

$\forall N \in \mathbb{N}$ On note $S_N = \sum_{n=0}^{N} u^n$. On note $S = \lim_{N \to +\infty} S_N$.

Soit $N \in \mathbb{N}$. $(Id-u)S_N = S_N(Id-u)$ car (b)

$= \sum_{n=0}^{N} u^n (Id-u) = \sum_{n=0}^{N} u^n - u^{n+1} = \sum_{n=0}^{N} u^n - \sum_{n=1}^{N+1} u^n$

$= id - u^{N+1}$.

Or $\|u^{N+1}\| \leq \|u\|^{N+1}$ (a) et puisque $\|u\| \leq 1$ $\lim_{n \to +\infty} \|u^{N+1}\| = 0$

Autrement dit $(u^{N+1})_{N \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. En passant à la limite les égalités préc. on obtient $(Id-u)S = S(Id-u) = id - 0 = id$. d'où $(Id-u)^{-1} = S$.

(la convergence de S vient du fait qu'on égalise $(Id-u)S_N$ ac qq ch dont on montre que ça cv).

15.2 **Déf** $GL(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u \text{ est bijectif}\}$ = l'ens. des élém^t inversibles de $\mathcal{L}(E)$.

15.3 **Pté** $GL(E)$ est ouvert.

Soit $L_0 \in GL(E)$. Soit $L \in \mathcal{L}(E)$. $L = L_0 + (L - L_0) = (id + (L-L_0)L_0^{-1})L_0$

et $\|(L-L_0)L_0^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \|L-L_0\|_{\mathcal{L}(E)} \times \|L_0^{-1}\|$. Donc si $L \in \mathcal{B}(L_0, \frac{1}{\|L_0^{-1}\|})$ alors $(L-L_0)L_0^{-1} \in \mathcal{B}(Id, 1)$

donc $\xrightarrow{15.1}$ $(Id + (L-L_0)L_0^{-1})$ est inversible, car $(-(L-L_0)L_0^{-1}) \in \mathcal{B}(Id, 1)$ aussi, et le produit de deux inversibles est inversible, $(id + (L-L_0)L_0^{-1}) \times L_0 \in GL(E)$, soit $L \in GL(E)$. d'où $\mathcal{B}(L_0, \frac{1}{\|L_0^{-1}\|}) \in GL(E)$. d'où $GL(E)$ ouvert.

15.4 **Pté** $\Gamma = \begin{pmatrix} GL(E) \to GL(E) \\ u \mapsto u^{-1} \end{pmatrix}$ est continue.

Soit $u \in GL(E)$. Soit $v \in \mathcal{B}(u, \rho) \subset GL(E)$ où $\rho < \frac{1}{\|u^{-1}\|}$

$v = u + (v-u) = (id + (v-u)u^{-1})u$. On pose $a = (v-u)u^{-1}$. alors $v = (id+a)u$

$\|-a\| = \|a\| = \|(v-u)u^{-1}\| \leq \|v-u\| \|u^{-1}\| \leq \rho \|u^{-1}\| < 1$.

Donc $id - (-a)$ est inversible et $(id+a)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-a)^n$. donc $v^{-1} = u^{-1} \times \sum_{n=0}^{+\infty} (-a)^n$

alors $v^{-1} - u^{-1} = u^{-1}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-a)^n - id\right) = u^{-1}\left(id + \sum_{n=1}^{+\infty} (-a)^n - id\right) = u^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (-a)^n (-a)$

$= u^{-1} \times (u-v) \times u^{-1} \times \sum_{n=0}^{+\infty} (-a)^n$.

$\forall N \in \mathbb{N} \left\| \sum_{n=0}^{N} (-a)^n \right\| \leq \sum_{n=0}^{N} \|(-a)^n\| \leq \sum_{n=0}^{N} \|-a\|^n = \sum_{n=0}^{N} \|a\|^n \leq \sum_{n=0}^{N} (\rho \|u^{-1}\|)^n$

or puisque $\rho \|u^{-1}\| < 1$ $\sum_{n=0}^{N} (\rho \|u^{-1}\|)^n \xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{1}{1 - \rho \|u^{-1}\|}$

d'où $\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} (-a)^n \right\| \leq \frac{1}{1 - \rho \|u^{-1}\|}$

alors $\|v^{-1} - u^{-1}\| \leq \frac{\|u^{-1}\| \|u - v\| \|u^{-1}\|}{1 - \rho \|u^{-1}\|}$

Soit $\|\Gamma(v) - \Gamma(u)\| \leq \frac{\|u^{-1}\|^2}{1 - \rho \|u^{-1}\|} \|v - u\|$.

D'où la continuité de Γ en u, et ce $\forall u \in GL(E)$. CQFD.