Somme de Fejer

Notations pour f fonction continue par morceau 2π-périodique

$$\forall k\in\mathbb{Z}\quad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} f(x)\,dx. \quad \text{(coefficient de Fourier)}$$

$$e_k = t\mapsto e^{ikt}$$

$$\forall p\in\mathbb{N}\quad S_p = \sum_{k=-p}^{p} c_k e_k \quad \text{(série de Fourier tronquée au rang } p\text{)}.$$

16.1 **Déf** Soit $n\in\mathbb{N}$. Le noyau de Fejer est $\Phi_n = t\mapsto \frac{1}{2\pi(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=-k}^{+k} e^{ilt}$

16.2 **Pté** $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in\mathbb{R},\ t\not\equiv 0\,[2\pi],\quad \Phi_n(t) = \frac{1}{2\pi(n+1)}\,\frac{\sin^2\left((n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin^2(t/2)}$

Soit $n\in\mathbb{N}$. Soit $t\not\equiv 0\,[2\pi]$ donc $t/2\not\equiv 0\,[\pi]$ donc $\sin(t/2)\neq 0$.

$$\frac{\sin^2((n+1)t/2)}{\sin^2(t/2)} = \left(\frac{e^{i\frac{n+1}{2}t}-e^{-i\frac{n+1}{2}t}}{2i}\right)^2\times\left(\frac{2i}{e^{it/2}-e^{-it/2}}\right)^2 = \left(\frac{e^{i\frac{n+1}{2}t}-e^{-i\frac{n+1}{2}t}}{e^{it/2}-e^{-it/2}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{e^{i\frac{n+1}{2}t}}{e^{it/2}}\right)^2\left(\frac{1-e^{-i(n+1)t}}{1-e^{-it}}\right)^2 = \left(e^{int/2}\right)^2\left(\frac{(e^{-it})^0-(e^{-it})^{n+1}}{1-(e^{-it})}\right)^2$$

$$= e^{int}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(e^{-it}\right)^k\right)^2 = e^{int}\sum_{k=0}^{n}e^{-itk}\times\sum_{j=0}^{n}e^{-itj}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}e^{it(n-(k+j))}$$

Or pour $(k,j)\in[0..n]^2$ $n-(k+j)\in[-n..n]$

et $\forall l\in[-n..n]$ $\mathrm{Card}\{(k,j)\in[0..n]^2 \mid n-(k+j)=l\} = \mathrm{Card}\{(k,j)\in[0..n]^2 \mid j=n-(l+k)\}$

$= \mathrm{Card}\{k\in[0..n] \mid 0\le n-(l+k)\le n\} = \mathrm{Card}\{k\in[0..n] \mid -l\le k\le n-l\}$

$= \mathrm{Card}\{k\in[0..n-l]\}$ si $l\geq 0$

$= \mathrm{Card}\{k\in[-l..n] = [|l|..n]\}$ si $l\le 0$ $\quad = n-|l|+1$

$\mathrm{Card}\{(k,j) \mid k\in[0..n],\ j\in[-k,k] \text{ et } j=l\} = \mathrm{Card}\{(k,j) \mid k\in[0..n] \text{ et } k\geq|l|\}$

$= \mathrm{Card}\{k\in[|l|..n]\} = n-|l|+1$

Donc $\frac{\sin^2((n+1)t/2)}{\sin^2(t/2)} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=-k}^{k}e^{ikt}$ d'où $\frac{1}{2\pi(n+1)}\frac{\sin^2((n+1)t/2)}{\sin^2(t/2)} = \Phi_n(t)$.

Rq : donc $\Phi_n\geq 0$.

16.3 **Pté** $\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)\,dt = 1$. pour tout $n\in\mathbb{N}$.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)\,dt = \frac{1}{2\pi(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=-k}^{k}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}e^{itl}\,dt}_{=0 \text{ sauf si } l=0} = \frac{1}{2\pi(n+1)}\times\sum_{k=0}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}dt = \frac{1}{2\pi(n+1)}\sum_{k=0}^{n}2\pi = 1$$

16.4 **Pté** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [-\pi, \pi]$ on a $\forall \alpha \in [0, |t|]$ $|\Phi_n(t)| \leq \frac{1}{2\pi(n+1)} \times \frac{1}{\sin^2(\frac{\alpha}{2})}$

Soit $t \in [-\pi, \pi]$. Soit $\alpha \in [0, |t|]$.

Si $t \leq 0$ $t/2 \in [-\pi/2, 0]$ donc $-\alpha/2 \in [t/2, 0] \subset [-\pi/2, 0]$ Or sur $[-\pi/2, 0]$ sinus est $\nearrow$ $-\alpha/2 \geq t/2$ donc $0 \geq \sin(-\alpha/2) \geq \sin(t/2)$ soit $0 \geq -\sin(\alpha/2) \geq \sin(t/2)$

donc $(\sin(\alpha/2))^2 \leq \sin(t/2)^2$ donc $\frac{1}{\sin^2(t/2)} \leq \frac{1}{\sin^2(\alpha/2)}$

Si $t \geq 0$ $\alpha/2 \in [0, t/2] \subset [0, \pi/2]$ or ici aussi sin est $\nearrow$ donc $0 \leq \sin(\alpha/2) \leq \sin(t/2)$

d'où $\sin(\alpha/2)^2 \leq \sin(t/2)^2$ et $\frac{1}{\sin^2(t/2)} \leq \frac{1}{\sin^2(\alpha/2)}$.

donc $|\Phi_n(t)| = \frac{1}{2\pi(n+1)} \frac{|\sin^2(\frac{n+1}{2}t)|}{|\sin^2(t/2)|} \leq \frac{1}{2\pi(n+1)} \frac{1}{\sin^2(t/2)} \leq \frac{1}{2\pi(n+1)} \frac{1}{\sin^2(\alpha/2)}$ CQFD.

16.5 **Déf** Pour $n \in \mathbb{N}$ la somme de Fejer de f de rang n est $F_n = \frac{1}{n+1} \sum_{p=1}^{n} S_p$.

16.6 **Pté** $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $F_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, \Phi_n(x-y)\, dy$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$F_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^{n} S_p(f)(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^{n} \sum_{k=-p}^{p} c_k\, e^{ikx} = \frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^{n} \sum_{k=-p}^{p} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} dy\, e^{ikx}$

$= \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sum_{p=0}^{n} \sum_{k=-p}^{p} e^{ik(x-y)} dy = \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\frac{1}{2\pi(n+1)} \sum_{p=0}^{n} \sum_{k=-p}^{p} e^{ik(x-y)} \right) dy$

$= \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, \Phi_n(x-y)\, dy$.

16.7 **Pté** Si f est continue (et 2π-periodique) $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformement vers f.

D'après 16.3 $1 = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)\, dt$ or vu l'expression de Φ_n en 16.2 Φ_n est paire et 2π-periodique

donc $\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(x-t)\, dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x) - F_n(x) = 1 \times f(x) - F_n(x)$

donc $f(x) - F_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(x-y) f(x)\, dy - \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(x-y) f(y)\, dy = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(x-y) [f(x) - f(y)]\, dy$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. f est continue sur $[-\pi, \pi]$ donc d'après Heine elle y est unif continue, par 2π-periodicité f est unif. cont sur $\mathbb{R}$ donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, $\alpha < \pi$ et $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$ $|u-v| \leq \alpha \Rightarrow |f(u) - f(v)| < \varepsilon/2$

$|f(x) - F_n(x)| = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(x-y) |f(x) - f(y)| dy = \int_{y \in [x-\alpha, x+\alpha]} \Phi_n(x-y) \underbrace{|f(x) - f(y)|}_{\leq \varepsilon/2} dy + \int_{y \in [-\pi, \pi],\, |x-y| > \alpha} \Phi_n(x-y) \underbrace{|f(x) - f(y)|}_{\leq 2\|f\|} dy$.

$|f(x) - F_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{u=-\alpha}^{u=\alpha} \Phi_n(u)\, du + 2\|f\| \int_{u \in [x-\pi, x+\pi] \text{ et } |u| > \alpha} \Phi_n(u)\, du$

d'après 16.4 car $\alpha < |u|$

$\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{u=-\pi}^{\pi} \Phi_n(u)\, du + 2\|f\| \frac{1}{2\pi(n+1)} \frac{1}{\sin^2(\alpha/2)} \int_{u \in [x-\pi, x+\pi] \text{ et } |u| > \alpha} du$

$\leq \varepsilon/2 + \frac{2\|f\|}{\sin^2(\alpha/2)} \frac{1}{n+1} \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{u = [x-\pi, x+\pi]} du}_{= 2\pi} \leq \varepsilon/2 + \frac{2\|f\|}{\sin^2(\alpha/2)} \frac{1}{n+1}$ (indep de x)

Or $\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{n+1} \leq \frac{\sin^2(\alpha/2)}{2\|f\|} \times \frac{\varepsilon}{2}$ donc tel que $\|f - F_n\|_\infty \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

d'où $\|f - F_n\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ CQFD.