19.

Un isomorphisme d'algèbre très utile

19.0 **Rappels** $(SO_2(\mathbb{R}), \times)$ = Groupe spécial des matrices orthogonales $= \{M \in O_2(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}$

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. $A \in \mathbb{R}SO_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad A = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}.SO_2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{C}$ sont des algèbres.

19.1 **Pté** $T = \begin{pmatrix} \mathbb{R}SO_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C} \\ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \longmapsto x+iy \end{pmatrix}$ est un isomorphisme d'algèbre.

Soit $A = \begin{pmatrix} x_A & -y_A \\ y_A & x_A \end{pmatrix} \in E$. Soit $B = \begin{pmatrix} x_B & -y_B \\ y_B & x_B \end{pmatrix} \in E$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

• $T(\lambda A + B) = T\left(\begin{pmatrix} \lambda x_a + x_b & -\lambda y_a + y_B \\ \lambda y_a + y_B & \lambda x_A \; x_B \end{pmatrix}\right) = (\lambda x_a + x_b) + i(\lambda y_a + y_b)$

$= \lambda(x_a + iy_A) + (x_b + iy_B) = \lambda T(A) + T(B)$

et $T(0) = T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0 + i0 = 0$

Donc T est un morphisme d'EV de $(E, +, \cdot)$ dans $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

• De plus $T(A \times B) = T\begin{pmatrix} x_a x_b - y_a y_b & -x_a y_b - y_a x_b \\ x_b y_a + x_a y_b & -y_a y_b + x_a x_b \end{pmatrix} = x_a x_b - y_a y_b + i(x_a y_b + y_a x_b)$

or $T(A) \times T(B) = (x_a + iy_a) \times (x_b + iy_b) = x_a x_b + iy_a x_b + iy_b x_a - y_a y_b$

$= x_a x_b - y_a y_b + i(y_a x_b + y_b x_a)$

donc $T(A \times B) = T(A) \times T(B)$ et $T(I_n) = T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1 + i0 = 1$

Ainsi T est un morphisme d'algèbre de $(E, +, \cdot, \times)$ ds $(\mathbb{C}, +, \cdot, \times)$

T est bijectif de réciproque évidente $T^{-1} : \begin{pmatrix} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}SO_2(\mathbb{R}) \\ x+iy \longmapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

19.2 **Pté** $\mathbb{R}SO_2(\mathbb{R})$ est une algèbre commutative c-à-d $\forall (A,B) \in \mathbb{R}SO_2(\mathbb{R})^2 \quad A \times B = B \times A$.

En effet $A \times B = T^{-1}(T(A)) \times T^{-1}(T(B)) = T^{-1}(T(A) \times T(B)) = T^{-1}(T(B) \times T(A)) = T^{-1}(T(B)) \times T^{-1}(T(A))$

car T est un morphisme d'algèbre en particulier morphisme d'anneau

par commutativité du produit ds $\mathbb{C}$

$= B \times A$

19.5 **Pté** $\forall M \in \mathbb{R}SO_2(\mathbb{R})$ $\quad e^{T^{-1}(M)} = T^{-1}(e^M)$ (a)

Δ $\quad T(e^M) = e^{T(M)}$ (b)

Rq (a) et (b) ne sont pas directement équivalents ; (a) est une égalité de matrice tandis que (b) est une égalité de complexes. On ne peut pas appliquer (a) à $M' = T(M)$ puis composer par T pour retrouver (b) puisque $T(M)$ n'est pas une matrice.

Soit $N \in \mathbb{N}$. Par linéarité de T on a $T\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{M^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{N} \frac{T(M^n)}{n!}$

Puisque T est aussi un isomorphisme d'anneau on a $\forall k \in \mathbb{N}\ T(M^k) = T(M)^k$

donc $T\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{M^n}{n!}\right) \boxed{=} \sum_{n=0}^{N} \frac{T(M)^n}{n!}$.

Puisque T est continue $\quad \lim_{N\to+\infty} T\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{M^n}{n!}\right) \boxed{=} T\left(\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{M^n}{n!}\right) \boxed{=} T(e^M)$

donc $e^{T(M)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{T(M)^n}{n!} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{T(M)^n}{n!} \boxed{=} \lim_{N\to+\infty} T\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{M^n}{n!}\right) \boxed{=} T(e^M)$ CQFD (a)

(b) se démontre de la même manière car l'algèbre $\mathbb{C}$ marche comme celle de $\mathbb{R}SO_2(\mathbb{R})$ et que T^{-1} est aussi linéaire et morphisme d'anneau.

19.3 **Pté** $T_{/SO_2(\mathbb{R})}^{\ \mathcal{U}(\mathbb{C})}$ est un isomorphisme de groupe $(SO_2(\mathbb{R}), \times)$ de $(\mathcal{U}(\mathbb{C}), \times)$. sphère unité

Si $A \in SO_2(\mathbb{R})$ il existe θ tel que $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (cf 20.4) alors $T(A) = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \in \mathcal{U}(\mathbb{C})$

Ds la demo de 20.3 on a déjà MQ T est un morphisme du monoïde $(SO_2(\mathbb{R}), \times)$ de $(\mathcal{U}(\mathbb{C}), \times)$

Il reste à gerer l'inversion : Soit $A \in SO_2(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ tel que $x^2 + y^2 = 1$

$T(A^{-1}) = T(A^*) = T\left(\begin{pmatrix} x & +y \\ -y & x \end{pmatrix}\right) = x - iy$ alors $T(A^{-1}) \times T(A) = (x+iy) \times (x-iy) = x^2 + iyx - iyx + y^2 = 1$ CQFD

19.4 **Pté** T et T^{-1} sont continues.

T et T^{-1} sont linéaires donc d'après 11.1 leur continuité équivaut au fait qu'elles sont bornées sur les sphères unités.

Soit $A = \alpha\tilde{A} \in \mathbb{R}SO_2(\mathbb{R})$. $\forall X \in \mathbb{R}^2$, on $\|AX\| = \|\alpha\tilde{A}X\| = |\alpha| \|\tilde{A}X\| = |\alpha| \|X\|$ car $\tilde{A} \in SO_2(\mathbb{R}) \subset O_2(\mathbb{R})$ et les matrices ortho sont des isomorphismes donc $|||A||| = |\alpha|$, donc $|||A||| = 1 \Leftrightarrow \alpha = +-1$

$\Leftrightarrow A = \tilde{A}$ ou $-\tilde{A} \Leftrightarrow A \in SO_2(\mathbb{R})$. Autrement dit $S_u(\mathbb{R}SO_2(\mathbb{R})) = SO_2(\mathbb{R})$.

$\forall A \in S_u(\mathbb{R}SO_2(\mathbb{R}))$ $A \in SO_2(\mathbb{R})$ dc d'après 19.3 $T(A) \in \mathcal{U}(\mathbb{C})$ dc $\|T(A)\| = 1$ d'où T bornée sur la sphère unité

$\forall z \in S_u(\mathbb{C})$ $z \in \mathcal{U}(\mathbb{C})$ ——— $T^{-1}(z) \in SO_2(\mathbb{R})$ dc $\|T^{-1}(z)\| = 1$

d'où T^{-1} bornée sur la sphère unité.