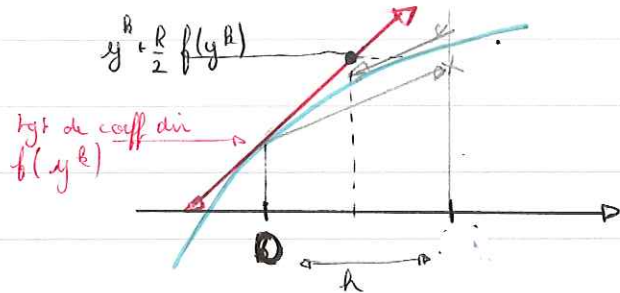


Schéma du point milieu

Problème On cherche à approcher la solⁿ y de l'équa diff autonome $y' = f(y)$ avec $f \in C^3$ et avec comme c.i $y(0) = y_0$

Définition du schéma On se donne un pas $h \in \mathbb{R}^{+*}$. On introduit $(y^k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $y^0 = y_0$ et $\forall k \in \mathbb{N}$ $\frac{y^{k+1} - y^k}{h} = f\left(y^k + \frac{h}{2} f(y^k)\right)$

Pourquoi le point milieu?



Erreur numérique $e^k = y(t_k) - y^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. $e^0 = 0$

Erreur de consistance $\forall k \in \mathbb{N}$ $c^k = \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} - f\left[y(t_k) + \frac{h}{2} f(y(t_k))\right]$

Théorème

Lemme $y \in C^3([0, T] \rightarrow \mathbb{R}) \Rightarrow \exists \eta \in \mathbb{R}^{+*}$ $\max_{t \in I} \|y'''\| \leq M$
aut. dit notre méthode est consistante d'ordre 2.

Preuve: On utilise le développem^t de Taylor à l'ordre 3 de y en t_{k+1} et en t_k

$$y(t_{k+1}) = y\left(\underbrace{t_k + h}_{\frac{(k+1)h}{2} + \frac{h}{2}}\right) = y\left(\frac{(k+1)h}{2}\right) + \frac{h}{2} y'\left(\frac{(k+1)h}{2}\right) + \frac{(h/2)^2}{2!} y''\left(\frac{(k+1)h}{2}\right) + \frac{(h/2)^3}{3!} y'''(\theta_k) \text{ où } \theta_k \in \left[\frac{kh}{2}, \frac{(k+1)h}{2}\right]$$

$$y(t_k) = y\left(\underbrace{t_k}_{\frac{(k)h}{2} + \frac{h}{2}}\right) = y\left(\frac{kh}{2}\right) + \frac{h}{2} y'\left(\frac{kh}{2}\right) + \frac{(h/2)^2}{2!} y''\left(\frac{kh}{2}\right) - \frac{(h/2)^3}{3!} y'''(\theta_k) \text{ où } \theta_k \in \left[\frac{(k-1)h}{2}, \frac{kh}{2}\right]$$

ainsi $\frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} = f\left(y\left(\frac{(k+1)h}{2}\right)\right) + 2 \times \frac{h^2}{8} \times \frac{1}{h} [y'''(\theta_k) - y'''(\theta_k)] = f\left(y\left(\frac{(k+1)h}{2}\right)\right) + \frac{h^2}{24} [y'''(\theta_k) - y'''(\theta_k)]$

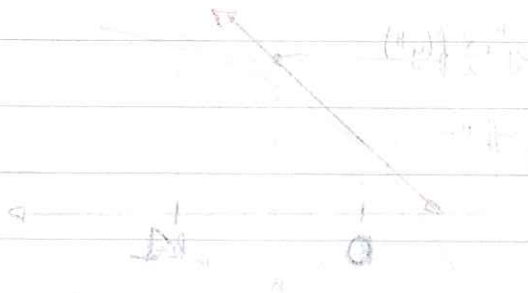
donc $\frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} - f\left[y(t_k) + \frac{h}{2} f(y(t_k))\right] = \frac{h^2}{24} [y'''(\theta_k) - y'''(\theta_k)] + f\left(y\left(\frac{(k+1)h}{2}\right)\right) - f\left(y\left(\frac{kh}{2}\right) + \frac{h}{2} f\left(y\left(\frac{kh}{2}\right)\right)\right)$
 $\leq 2 \max_{t \in I} \|y'''\|$

or étant L-lipz $\left| \frac{f(y(RR+\frac{R}{2})) - f(y(RR) + \frac{R}{2} f(RR))}{2} \right| \leq L \left| \frac{y(RR+\frac{R}{2}) - y(RR) - \frac{R}{2} f(RR)}{2} \right|$

or en développant (Taylor encore) $y(RR+\frac{R}{2}) = y(RR) + \frac{R}{2} y'(RR) + \frac{R^2}{2} y''(RR) + \frac{R^3}{6} y'''(RR) + \dots$

donc $A \leq L \left| \frac{R^2}{2} y''(RR) \right| \leq R^2 \frac{L}{2} \text{Max}_{[a,T]} |y''|$

Donc $|c^R| \leq R^2 \frac{\text{Max}_{[a,T]} |y''|}{2} + R^2 \frac{L}{2} \text{Max}_{[a,T]} |y''| \leq C \times R^2$ avec $C = \frac{\text{Max}_{[a,T]} |y''| + L \text{Max}_{[a,T]} |y''|}{2}$



$$y_p = (a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots)$$

$$y_p = (a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots)$$

Il s'agit de trouver une solution particulière de l'équation différentielle...

On suppose que la solution particulière est de la forme $y_p = (a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots)$

$$(a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots)'' + (a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots) = (a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots)$$

$$2a_2 p + a_1 = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots$$

$$2a_2 p + a_1 = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots$$

$$(2a_2 p + a_1) - (a_0 + a_1 p) = a_2 p^2 + \dots$$

$$a_2 p + (a_1 - a_0) = a_2 p^2 + \dots$$