Modèle de regression multiple

Cadre pratique On pense qu'une quantité X dépend de manière affine par rapport à $p-1$ quantités Y_i. On mesure donc n fois la valeur de la qté X et les valeurs des qté Y_i associées.

27.1 **Modèle** $\boxed{\tilde{X} = [\mathbb{1}\ Y_1 \cdots Y_{p-1}]\,\Theta \quad \text{où } \forall i \in [1..p]\ Y_i \in \mathbb{R}^n \text{ et } \Theta = (\Theta_i)_{i\in[1..p]} \in \mathbb{R}^p}$

27.2 **Régularité** $\tilde{X} = [\mathbb{1}\ Y_1 \cdots Y_{p-1}]\,\Theta$ est un modèle régulier $\Leftrightarrow$ $(\mathbb{1}, Y_1, \dots Y_{p-1})$ est une famille libre

Cas de la regression double

$\simeq$ plan de regression

27.3 **Modèle** $\boxed{\tilde{X} = [\mathbb{1}\ Z_1\ Z_2]\,\Theta \quad \text{où } (Z_1, Z_2) \in {\mathbb{R}^n}^2 \text{ et } \Theta \in \mathbb{R}^3}$

27.4 **Régularité** $\tilde{X} = [\mathbb{1}\ Z_1\ Z_2]\,\Theta$ est régulier $\Leftrightarrow \begin{cases} Var(Z_1) > 0 \\ Var(Z_2) > 0 \\ cov(Z_1, Z_2)^2 \leq Var(Z_1)\, Var(Z_2) \end{cases}$

- Si le modèle est régulier alors $(\mathbb{1}, Z_1)$ et $(\mathbb{1}, Z_2)$ sont libres donc d'après 24.2 $Var(Z_1) > 0$ et $Var(Z_2) > 0$. Ceci étant assuré on peut utiliser ◯ et $(\mathbb{1}, Z_1, Z_2)$ est libre $\Rightarrow \forall (a,b,c) \neq (0,0,0) \quad aZ_1 + bZ_2 \neq c\mathbb{1} \Rightarrow |\rho(Z_1, Z_2)| \neq 1$ soit $\rho(Z_1, Z_2)^2 < 1$ donc $c(Z_1, Z_2)^2 < var(Z_1)\, var(Z_2)$.
- Réciproquem^t si $Var(Z_1) > 1$, $Var(Z_2) > 0$ et $cov(Z_1, Z_2)^2 \leq Var(Z_1)\, Var(Z_2)$ on a ttes les hypothèses pour utiliser la négation de ◯ et alors $\forall (a,b,c) \neq (0,0,0)\ aZ_1 + bZ_2 \neq c\mathbb{1}$ soit $(Z_1, Z_2, \mathbb{1})$ de rg 3 et modèle rég.

27.5 **Moindres carrés** La solution au problème des moindres carrés pour ce modèle est donné par $\hat{\Theta} = \begin{pmatrix} \hat{a_0} \\ \hat{a_1} \\ \hat{a_2} \end{pmatrix}$ où

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{a_0} &= m(X) - \hat{a_1}\, m(Z_1) - \hat{a_2}\, m(Z_2) \\ \hat{a_1} &= \frac{c(Z_2, Z_2)\, c(Z_1, X) - c(Z_1, Z_2)\, c(Z_2, X)}{v(Z_1)\, v(Z_2) - c(Z_1, Z_2)} \\ \hat{a_2} &= \frac{c(Z_1, Z_1)\, c(Z_2, X) - c(Z_1, Z_2)\, c(Z_1, X)}{v(Z_1)\, v(Z_2) - c(Z_1, Z_2)} \end{aligned}}$$

soit $\hat{X} = \hat{a_0}\,\mathbb{1} + \hat{a_1}\, Z_1 + \hat{a_2}\, Z_2$

notons $\Theta = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

$$\|X-\tilde{X}\|^2 = \|P_{\mathbb{1}}^{\perp}(X-\tilde{X}) + (I_n - P_{\mathbb{1}}^{\perp})(X-\tilde{X})\|^2 = \underbrace{\|P_{\mathbb{1}}^{\perp}(X-\tilde{X})\|^2}_{A} + \underbrace{\|(I_n - P_{\mathbb{1}}^{\perp})(X-\tilde{X})\|^2}_{B} \quad \text{(Pythagore)}$$

$$B = \|X - \tilde{X} - P_{\mathbb{1}}^{\perp}(X) + P_{\mathbb{1}}^{\perp}(\tilde{X})\|^2 = \|X - \tilde{X} - \bar{X}\mathbb{1} + \bar{\tilde{X}}\mathbb{1}\|^2 = \|(X - \bar{X}\mathbb{1}) + (\tilde{X} - \bar{\tilde{X}}\mathbb{1})\|^2$$

or $\tilde{X} - \bar{\tilde{X}}\mathbb{1} = \cancel{a_0\mathbb{1}} + a_1 Z_1 + a_2 Z_2 - (\cancel{a_0} + a_1 m(Z_1) + a_2 m(Z_2))\mathbb{1} = a_1(Z_1 - m(Z_1)\mathbb{1}) + a_2(Z_2 - m(Z_2)\mathbb{1})$

On centre le problème en posant • $\mathcal{Z}_1 = Z_1 - m(Z_1)\mathbb{1}$ • $\mathcal{Z}_2 = Z_2 - m(Z_2)\mathbb{1}$

• $\mathcal{X} = X - m(X)\mathbb{1}$ • $\mathcal{A} = [\mathcal{Z}_1 \ \mathcal{Z}_2]$ • $\tilde{\mathcal{X}} = \mathcal{A}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$

Ainsi $B = \|\mathcal{X} - \tilde{\mathcal{X}}\|^2$ car $\tilde{X} - \bar{\tilde{X}} = a_1\mathcal{Z}_1 + a_2\mathcal{Z}_2 = \mathcal{A}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \tilde{\mathcal{X}}$.

Donc minimiser B revient à résoudre un pb de moindre carrés plus simple, on a éliminé une dimension en s'affranchissant de la composante constante a_0.

Pour minimiser $\|X-\tilde{X}\|^2 = A + B$ on peut minimiser d'une part B ce qui fixera a_1 et a_2, et minimiser A d'autre part, ce qui donne a_0.

minimiser B

$\mathcal{A}$ est de rg 2 en effet si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ $\alpha\mathcal{Z}_1 + \beta\mathcal{Z}_2 = \alpha Z_1 + \beta Z_2 - (\alpha m(Z_1) + \beta m(Z_2))\mathbb{1} \neq 0$

car $(Z_1, Z_2, \mathbb{1})$ est libre (dc CL valant 0 que si ts les coefs sont nuls)

Donc d'après 23.3 $\begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{bmatrix} = (\mathcal{A}'\mathcal{A})^{-1}\mathcal{A}'\mathcal{X}$.

$$\mathcal{A}'\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_1'\mathcal{Z}_1 & \mathcal{Z}_2'\mathcal{Z}_1 \\ \mathcal{Z}_1'\mathcal{Z}_2 & \mathcal{Z}_2'\mathcal{Z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Z_1 - \bar{Z}_1\mathbb{1})^2 & (Z_2 - \bar{Z}_2\mathbb{1})(Z_1 - \bar{Z}_1\mathbb{1}) \\ (Z_1 - \bar{Z}_1\mathbb{1}).(Z_2 - \bar{Z}_2\mathbb{1}) & (Z_2 - \bar{Z}_2\mathbb{1})^2 \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} v(Z_1) & cov(Z_1, Z_2) \\ cov(Z_1, Z_2) & v(Z_2) \end{bmatrix}$$

$$\text{donc } (\mathcal{A}'\mathcal{A})^{-1} = \frac{1}{n^{\cancel{2}}(v(Z_1)v(Z_2) - c(Z_1,Z_2)^2)} \times \cancel{n} \begin{bmatrix} v(Z_2) & -c(Z_1,Z_2) \\ -c(Z_1,Z_2) & v(Z_1) \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \mathcal{A}'\mathcal{X} = \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_1' \\ \mathcal{Z}_2' \end{bmatrix}\mathcal{X} = \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_1'\mathcal{X} \\ \mathcal{Z}_2'\mathcal{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Z_1 - \bar{Z}_1\mathbb{1}).(X - \bar{X}\mathbb{1}) \\ (Z_2 - \bar{Z}_2\mathbb{1}).(X - \bar{X}\mathbb{1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n\ cov(Z_1, X) \\ n\ cov(Z_2, X) \end{bmatrix}$$

$$\text{donc } \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{bmatrix} = (\mathcal{A}'\mathcal{A})^{-1}\mathcal{A}'\mathcal{X} = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(v(Z_1)v(Z_2) - c(Z_1,Z_2)^2)} \begin{bmatrix} v(Z_2)c(Z_1,X) - c(Z_1,Z_2)c(Z_2,X) \\ -c(Z_1,Z_2)c(Z_1,X) + v(Z_1)c(Z_2,X) \end{bmatrix}$$

minimiser A

$$A = \|m(X-\tilde{X})\mathbb{1}\|^2 = |\bar{X} - \bar{\tilde{X}}|^2\|\mathbb{1}\|^2 = n^2|\bar{X} - \overline{a_0\mathbb{1} + a_1 Z_1 + a_2 Z_2}|^2 = n^2|\bar{X} - (a_0 + a_1\bar{Z}_1 + a_2\bar{Z}_2)|^2$$

donc A est minimal pour $a_0 + a_1\bar{Z}_1 + a_2\bar{Z}_2 = \bar{X}$ d'où $\hat{a}_0 = \bar{X} - \hat{a}_1\bar{Z}_1 - a_2\bar{Z}_2$

<u>Remarque</u> En considérant le nuage de points de l'espace $(Z_{1,i}, Z_{2,i}, X_i)$ et le plan de regression associé au modèle $P : z = \hat{a}_1 x + \hat{a}_2 y + \hat{a}_0$, on a $G = \text{bar}\{(Z_{1,i}, Z_{2,i}, X_i) | i \in [1,n]\} \in P$

En effet $G = (\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \bar{X})$ donc $\hat{a}_1 x_G + \hat{a}_2 y_G + \hat{a}_0 = \hat{a}_1\bar{Z}_1 + \hat{a}_2\bar{Z}_2 + \hat{a}_0 = \bar{X} = z_G$ d'où $G \in P$.