Orthogonaux et projecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-EV muni d'un produit scalaire noté $<.>$, et d'une BON associée à ce produit scalaire ainsi $\forall (X,Y)\in E^2 \ <X.Y> = X'Y$ (On note X' pour transposée(X))

28.1 **Déf** Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. $A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A, \langle x|a\rangle = 0\}$

28.2 **Pté** Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ (a) • $A^\perp$ est un SEV de E

(b) • $(A^\perp)^\perp = \mathrm{Vect}(A)$. (Vect A de dim finie?)

a) $\forall a \in A \ \langle a|0_E\rangle = 0$ donc $0_E \in A^\perp$

Soit $(x,y) \in (A^\perp)^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\forall a \in A \ \langle x+\lambda y|a\rangle = \langle x|a\rangle + \lambda\langle y|a\rangle = 0+\lambda 0 = 0$ donc $x+\lambda y \in A^\perp$

d'où $A^\perp$ est 1 SEV

b) Soit $V \in \mathrm{Vect}(A)$. Par définition il existe $n \in \mathbb{N}$, $(a_i)_{i\in[1..n]} \in A^n$ et $(\lambda_i)_{i\in[1..n]} \in \mathbb{K}^n$ tel que $V = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$. $\forall x \in A^\perp \ \langle x|v\rangle = \langle x|\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underbrace{\langle x|a_i\rangle}_{=0} = 0$ d'où $V \in (A^\perp)^\perp$.

On a donc l'inclusion $\mathrm{Vect}\, A \subset (A^\perp)^\perp$.

Supposons que $\mathrm{Vect}\, A \neq (A^\perp)^\perp$. Alors il existe $y \in (A^\perp)^\perp$ tel $y \notin \mathrm{Vect}\, A$.

Soit B_1 une base orthogonale de $\mathrm{Vect}\, A$ qu'on complète en une base $B = (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de E.

Soit $N \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tel que $B_1 = (b_i)_{i\in N}$. $Y \notin \mathrm{Vect}\, A$ donc $\forall i \in N \ \langle Y|b_i\rangle = 0$ mais Y doit avoir ê non nul donc $\exists k \in \mathbb{N}\setminus N$ tel que $\langle Y|b_k\rangle = \alpha \neq 0$. On pose $Z = b_k$. $Z \in A^\perp$ mais $\langle Y|Z\rangle = \alpha \neq 0$, contradictoire avec $Y \in (A^\perp)^\perp$. D'où $\mathrm{Vect}\, A = (A^\perp)^\perp$.

28.3 **Pté** Soit $(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$. $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$

Si $X \in B^\perp$ alors $\forall Y \in B \ \langle X|Y\rangle = 0$ donc $\forall Y \in A \subset B \ \langle X|A\rangle = 0$ dc $X \in A^\perp$ d'où $B^\perp \subset A^\perp$

28.4 **Pté** Soit P un projecteur dans E. $E = \mathrm{Ker}\, P \oplus \mathrm{Im}\, P$

Soit $X \in E$. $X = X - P(X) + P(X)$. $P(X) \in \mathrm{Im}\, P$.

$P(X-P(X)) = P(X) - P^2(X) = P(X) - P(X) = 0$ dc $X - P(X) \in \mathrm{Ker}\, P$

d'où $E = \mathrm{Ker}P + \mathrm{Im}P$.

Soit $X \in \mathrm{Ker}P \cap \mathrm{Im}P$. Il existe $Z \in E$, $X = P(Z)$.

$\underset{\text{car } X\in \mathrm{Ker}P}{0 = P(X)} = P(P(Z)) = \underset{\text{car } P^2 = P \text{ déf du proj}}{P^2(Z) = P(Z)} = X$ d'où $\mathrm{Ker}\, P \cap \mathrm{Im}\, P = \{0\}$

et donc $\mathrm{Ker}\, P \oplus \mathrm{Im}\, P = E$.

28.5 **Pté** Soit M la matrice d'un endomorphisme de E

(a) $\operatorname{Ker} M \subset (\operatorname{Im}(M'))^{\perp}$

(b) $\operatorname{Im} M \subset (\operatorname{Ker}(M'))^{\perp}$

Soit $X \in \operatorname{Ker} M$. Soit $Y = M'Z \in \operatorname{Im} M'$ $\langle X|Y\rangle = Y'X = (M'Z)'X = Z'\underbrace{MX}_{=0_E} = 0$ d'où $X \in (\operatorname{Im} M')^{\perp}$ et a.

Soit $X = M(Z) \in \operatorname{Im} M$. Soit $Y \in \operatorname{Ker} M'$ $\langle X|Y\rangle = X'Y = (MZ)'Y = Z'\underbrace{M'Y}_{=0} = 0$ d'où $X \in (\operatorname{Ker} M')^{\perp}$ et b

28.6 **Pté** Soient A, B, P, Q 4 SEV de E $\left.\begin{array}{l} E = A \oplus B \\ E = P \oplus Q \\ A \subset P \text{ et } B \subset Q \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = P \\ B = Q \end{array}\right.$

Soit $x \in P$. Puisque $E = A \oplus B$, il existe $(x_A, x_B) \in A \times B$ tels que $x = x_A + x_B$.
$x_B = x - x_A$. $x_B \in B \subset Q$ et $x - x_A \in P$ car $x \in P$, $x_A \in A \subset P$ et P est un SEV donc $x_B \in P \cap Q = \{0\}$ d'où $x_B = 0$ et $x = x_A \in A$ soit $P \subset A$.
De même on montre que $y \in Q$ est nécessairement ds B, on conclut par deux doubles inclusions.

28.7 **Pté** Soit P la matrice d'un projecteur. P' est alors aussi la matrice d'1 proj.
$(P')^2 = P'P' = (PP)' = (P^2)' = (P)'$ donc P' est bien un projecteur.

28.8 **Pté** Soit F un SEV de E. Le projecteur orthogonal sur F est unique.
Soient P et Q 2 proj orthogonaux sur F. $F = \operatorname{Im} P = \operatorname{Im} Q$ et $F^{\perp} = \operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker} Q$
Soit $X \in E$. $P(X) - Q(X) \in F = \operatorname{Im} P$. et $P(P(X) - Q(X)) = P^2(X) - P(Q(X)) = P(X) - P(Q(X))$
dc $P(P(X) - Q(X)) = P(X - Q(X)) = 0$ car $X - Q(X) \in \operatorname{Ker} Q = \operatorname{Ker} P$. donc $P(X) - Q(X) \in \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Ker} P$
d'où $P(X) - Q(X) = 0$ et ce pour tt $X \in E$ d'où $P = Q$.

28.9 **Pté** P est la matrice d'un projecteur orthogonal $\Rightarrow P^2 = P$ et $P' = P$

- P est un projecteur donc $P^2 = P$ (déf). D'après 28.7 P' est aussi un projecteur de 21.4 appliqué à P et P' donne $E = \operatorname{Ker} P \oplus \operatorname{Im} P = \operatorname{Ker} P' \oplus \operatorname{Im} P'$. P est un proj <u>ortho</u> donc $\operatorname{Ker} P^{\perp} = \operatorname{Im} P$ et $\operatorname{Im} P^{\perp} = \operatorname{Ker} P$ (cf 28.2).
Les inclusions de 28.5 passées à l'orthogonal par 28.3 deviennent $\begin{array}{l} \operatorname{Im}(P') \subset \operatorname{Ker} P^{\perp} = \operatorname{Im} P \\ \operatorname{Ker}(P') \subset \operatorname{Im} P^{\perp} = \operatorname{Ker} P \end{array}$
donc d'après 28.6 avec $A = \operatorname{Im} P'$, $B = \operatorname{Ker} P'$, $P = \operatorname{Im} P$ et $Q = \operatorname{Ker} P$ on a $\operatorname{Im} P = \operatorname{Im} P'$ et $\operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker} P'$. Donc P' est aussi le projecteur orthogonal sur $\operatorname{Im} P$, or 28.8 donne l'unicité d'où $P' = P$

⚠ Cf 28.11 pour la réciproque.

Orthogonaux et projecteurs (suite)

28.10 **Pté** Soit $(A,B) \in \mathcal{P}(E)$. $A^\perp \cap B^\perp = (A\cup B)^\perp \subset \mathrm{Vect}(A\cup B)^\perp$

Soit $X \in A^\perp \cap B^\perp$. $\forall Y \in A\cup B$, $Y\in A$ ou $Y \in B$ donc $\forall Y \in A\cup B$ $\langle X|Y\rangle = 0$ ou $\langle X|Y\rangle = 0$

donc $X \in (A\cup B)^\perp$ d'où l'inclusion $A^\perp \cap B^\perp \subset (A\cup B)^\perp$

Soit $X \in (A\cup B)^\perp$. $\forall Y \in A$, $Y \in A\cup B$ donc $\langle X|Y\rangle = 0$ d'où $X \in A^\perp$
$\forall Y \in B$, $Y \in A\cup B$ donc $\langle X|Y\rangle = 0$ d'où $X \in B^\perp$ $\Big\}$ $X \in A^\perp \cap B^\perp$ d'où $(A\cup B)^\perp \subset A^\perp \cap B^\perp$

Soit $Y = \alpha Y_A + \beta Y_B \in \mathrm{Vect}(A\cup B)$ $\langle X|Y\rangle = \alpha \underbrace{\langle X|Y_A\rangle}_{\in A^\perp} + \beta \underbrace{\langle X|Y_B\rangle}_{\in B^\perp} = \alpha 0 + \beta 0 = 0$ d'où $X \in \mathrm{Vect}(A\cup B)^\perp$

CQFD (on a l'égalité par double inclusion).

28.11 **Pté** P est une matrice telle que $\begin{cases} P^2 = P \\ P' = P \end{cases}$ $\Rightarrow$ P est la matrice d'un proj. orthogonal

$P^2 = P$ donc P est la matrice d'un projecteur (déf). D'après 28.4 on a alors $E = \mathrm{Ker}\,P \oplus \mathrm{Im}\,P$

D'après 28.5 $\mathrm{Ker}\,P \subset (\mathrm{Im}(P'))^\perp = (\mathrm{Im}\,P)^\perp$ et $\mathrm{Im}\,P \subset (\mathrm{Ker}(P'))^\perp = \mathrm{Ker}(P)^\perp$.

Soit $X \in E$. Il existe $(X_i, X_k) \in \mathrm{Im}\,P \times \mathrm{Ker}\,P$ tel que $X = X_i + X_k$. d'après les inclusions ci-dessus $X_i \in \mathrm{Im}\,P^\perp$ et $X_k \in \mathrm{Ker}\,P^\perp$ donc $E = \mathrm{Im}\,P^\perp + \mathrm{Ker}\,P^\perp$. De plus si $X \in \mathrm{Im}\,P^\perp \cap \mathrm{Ker}\,P^\perp$

d'après 28.10 $X \in (\mathrm{Im}\,P \cup \mathrm{Ker}\,P)^\perp \subset \mathrm{Vect}(\mathrm{Im}\,P \cup \mathrm{Ker}\,P)^\perp \underset{\text{car ce sont déjà des SEV}}{=} (\mathrm{Im}\,P + \mathrm{Ker}\,P)^\perp = E^\perp = \{0\}$.

donc $X = 0$ soit $\mathrm{Im}\,P^\perp \cap \mathrm{Ker}\,P^\perp = \{0\}$ et donc $E = \mathrm{Ker}\,P^\perp \oplus \mathrm{Im}\,P^\perp$.

On peut donc appliquer 28.6 avec $A = \mathrm{Ker}\,P$ $B = \mathrm{Im}\,P$ $P = \mathrm{Im}\,P^\perp$ et $Q = \mathrm{Ker}\,P^\perp$

on obtient enfin $\mathrm{Ker}\,P = \mathrm{Im}\,P^\perp$ (et $\mathrm{Im}\,P = \mathrm{Ker}\,P^\perp$) donc P est bien un projecteur orthogonal.