Lemme de Gronwall discret

30.1 **Pté** (version 1) Soit $(u_n)_{n\in[\![0..N]\!]} \in \mathbb{R}^{[\![0..N]\!]}$ où $N \in \mathbb{N}$

Si il existe $(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^+ \times [-1, +\infty[\setminus \{0\}$ tels que $\begin{cases} u_0 + \frac{\mu}{\lambda} \geq 0 \\ \forall n \in [\![0..N-1]\!] \quad u_{n+1} - u_n \leq \lambda u_n + \mu \end{cases}$

Alors $\forall n \in [\![0..N]\!] \quad \left(u_n + \frac{\mu}{\lambda}\right) \leq \left(u_0 + \frac{\mu}{\lambda}\right) e^{\lambda n}$

Démonstration : Posons $(v_n)_{n\in[0..N]} = \left(u_n + \frac{\mu}{\lambda}\right)_{n\in[0..N]}$. On a alors $v_0 = u_0 + \frac{\mu}{\lambda} \geq 0$.

On introduit la propriété P_n : $v_n \leq v_0 e^{\lambda n}$.

Puisque $v_0 \leq v_0 e^0$ on a P_0.

Soit $n \in [0..N]$ On suppose que P_n est vraie donc $v_n \leq v_0 e^{\lambda n}$

$v_{n+1} - v_n = \left(u_{n+1} - \frac{\mu}{\lambda}\right) - \left(u_n - \frac{\mu}{\lambda}\right) = u_{n+1} - u_n \leq \lambda u_n + \mu = \lambda v_n$

donc $v_{n+1} \leq (\lambda+1) v_n \leq e^{\lambda} v_n \leq e^{\lambda} v_0 e^{\lambda n} = v_0 e^{\lambda(n+1)}$

d'où P_{n+1}.

Ainsi par itération $\forall n \in [0..N]$ P_n est vraie soit $\left(u_n + \frac{\mu}{\lambda}\right) \leq \left(u_0 + \frac{\mu}{\lambda}\right) e^{\lambda n}$.

Remarque L'ennoncé s'étend aux suites infinies ($n \in \mathbb{N}$), la preuve est la même (récurrence au lieu d'itération). De même pour la version 2 ci-dessous.

30.2 **Pté** (version 2) Soient $(u_n)_{n\in[\![0..N]\!]} \in \mathbb{R}^{[\![0..N]\!]}$ **et** $(\mu_n)_{n\in[\![0..N]\!]} \in \mathbb{R}^{[\![0..N]\!]}$ où $N \in \mathbb{N}$

Si $u_0 \geq 0$; $\mu_0 \geq 0$ et il existe $\lambda \in [-1, +\infty[\setminus \{0\}$ tel que $\forall n \in [0..N-1]$ $u_{n+1} - u_n \leq \lambda u_n + \mu_n$

Alors $\forall n \in [0..N] \quad u_n \leq e^{\lambda n} u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} e^{\lambda k} \mu_{n-k-1}$

Démonstration On introduit la propriété P_n : $u_n \leq (1+\lambda)^n u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} e^{\lambda k} \mu_{n-k-1}$.

$u_0 \leq (1+\lambda)^0 u_0 + 0$ donc P_0 est vérifiée

Soit $n \in [0..N-1]$. On suppose que P_n est vraie.

$u_{n+1} - u_n \leq \lambda u_n + \mu_n$ donc $u_{n+1} \leq (1+\lambda) u_n + \mu_n$, en utilisant P_n on

a donc $u_{n+1} \leq (1+\lambda)(1+\lambda)^n u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left((1+\lambda) e^{\lambda k} \mu_{n-k-1}\right) + \mu_n$

$\leq (1+\lambda)^{n+1} u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\lambda} e^{\lambda k} \mu_{n-k-1}\right) + \mu_n$

$\leq (1+\lambda)^{n+1} u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\lambda(k+1)} \mu_{n+1-(k+1)-1}\right) + \mu_{(n+1)-0-1} \times e^{\lambda \times 0}$

$\leq (1+\lambda)^{n+1} \mu_0 + \sum_{k'=0}^{(n+1)-1} e^{\lambda k'} \mu_{n+1-k'-1}$ d'où P_{n+1} est vraie.

Par itération $\forall n \in [0..N]$ P_n. Or $\forall n \in [0..N]$ $P_n \Rightarrow u_n \leq e^{\lambda n} u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} e^{\lambda k} \mu_{n-k-1}$ d'où la pté.