Théorème de Bolzano-Weierstraß

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$.
$[a,b]$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$.

Remarque : Cela équivaut à dire que toute suite réelle bornée admet une valeur d'adhérence.

· Démonstration par dichotomie.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [a,b]^{\mathbb{N}}$

On pose $a_{-1}=a_0=a$, $b_{-1}=b_0=b$ et $l_0=b_0-a_0$

- $[a_0,b_0]\subset[a_{-1},b_{-1}]$ (car égal !) (i)
- $[a_0,b_0]$ contient tous les termes de la suite donc en contient une infinité. (ii)
- $b_0-a_0=\frac{1}{2^0}l_0$ (iii)

Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose avoir construit $[a_n,b_n]$ tel que :

- $[a_n,b_n]\subset[a_{n-1},b_{n-1}]$ (i)
- $[a_n,b_n]$ contient une infinité de termes de la suite (ii)
- $l_n=b_n-a_n=\frac{1}{2^n}l_0$ (iii)

Alors $[a_n,a_n+\frac{l_n}{2}]$ et $[a_n+\frac{l_n}{2},b_n]$ ne peuvent pas tous les deux contenir un nombre fini de termes de la suite.

- Si $[a_n,a_n+\frac{l_n}{2}]$ contient une infinité de termes de la suite, on pose

  $a_{n+1}=a_n$, $b_{n+1}=a_n+\frac{l_n}{2}$. Ainsi
  - $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$ (i)
  - $[a_{n+1},b_{n+1}]$ contient une infinité de termes de la suite (ii)
  - $l_{n+1}=b_{n+1}-a_{n+1}=a_n+\frac{l_n}{2}-a_n=\frac{l_n}{2}=\frac{1}{2^n}\times l_0\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2^{n+1}}l_0$ (iii)

- Sinon on pose $a_{n+1}=a_n+l_n/2$, $b_{n+1}=b_n$.
  - $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$ (i)
  - $[a_{n+1},b_{n+1}]$ contient nécessairement une infinité de termes de la suite. (ii)
  - $l_{n+1}=b_{n+1}-a_{n+1}=b_n-a_n-\frac{l_n}{2}=l_n-\frac{l_n}{2}=\frac{1}{2}l_n=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^n}l_0=\frac{1}{2^{n+1}}l_0$. (iii)

Par itération on peut donc construire $([a_n,b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés, décroissante (par i), dont le diamètre (ici longueur de l'intervalle) tend vers 0 (par iii). D'après le théorème des fermés emboîtés

$$\bigcap_{n\to+\infty} ([a_n, b_n]) = \{x\} \text{ où } x \in \mathbb{R}.$$

Reste à montrer que x est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. Soit $N \in \mathbb{N}$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $1/2^n \leq \varepsilon/l_0$. $[a_n, b_n]$ contient une infinité de termes de la suite, il existe donc nécessairement $N_0 \geq N$ tel que $x_{N_0} \in [a_n, b_n]$, or $x \in [a_n, b_n]$ donc $|x_{N_0} - x| \leq l_n = \frac{1}{2^n} l_0 \leq \varepsilon$. Donc x est bien valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

D'où $[a,b]$ est compacte.

Autre démonstration

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [a,b]^{\mathbb{N}}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ on pose $A_n = \{x_m \mid m \geq n\}$. $\forall n \in \mathbb{N}$ $A_n \in [a,b]$ on peut donc poser $\forall n \in \mathbb{N}$ $M_n = \sup A_n$. A_n est $\searrow$ donc M_n est $\searrow$ et minorée par a.

Il existe donc $M \in \mathbb{R}$ tel que M_n converge vers M.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. Soit $N \in \mathbb{N}$.

Il existe $n \geq N$ tel que $M_n \leq M + \varepsilon$ (par conv. $\searrow$ de M_n vers M).

$M_n - \varepsilon/2$ n'est pas un majorant de A_n car M_n, en sup, est le plus petit des majorants, il existe donc $x_k \in A_n$ tel que $M_n - \varepsilon \leq x_k$. soit $M - \varepsilon \leq x_k$ | car $M_n \geq$

Puisque $x_k \in A_n$, il existe $N_0 \geq n \geq N$ tel que $x_k = x_{N_0}$; de plus $x_{N_0} \leq M_n \leq M + \varepsilon$ donc $x_{N_0} \in [M-\varepsilon, M+\varepsilon]$ et $N_0 > N$.

D'où M est bien valeur d'adhérence et $[a,b]$ bien compacte.

Rq : la première démonstration "exhibe" la plus petite valeur d'adhérence de la suite, tandis que la seconde "exhibe" la plus grande.

Mais en choisissant en priorité le ½ intervalle ~~droit~~ ; ou en s'intéressant plutôt à l'inf on peut changer ça.