Compacité locale et théorème de Riesz

Soit (X, Θ) un espace topologique. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

40.0 **Rappel** Soit $x \in X$. V est un voisinage de $x \iff V \in \mathcal{P}(X)$ et il existe $U \in \Theta$ tq $x \in U \subset V$
Nous noterons $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x.

40.1 **Déf** Soit $x \in X$. B est une base de voisinages de $x \iff \begin{cases} B \subset \mathcal{V}(x) \\ \forall V \in \mathcal{V}(x), \exists V' \in B, V' \subset V \end{cases}$

40.2 **Pté** Si (X, Θ) est un espace topologique régulier (cf 90.2)
alors pour tout $x \in X$ on a
x admet un voisinage compact (a)
$\iff$ x admet une base de voisinages compacts (b)
$\iff$ il existe un compact dont x est point intérieur. (c)

Preuve : (a)$\Rightarrow$(c) Evident car un point est toujours point int. d'un de ses voisinages
(c)$\Rightarrow$(b) Supposons qu'il existe un compact K tel que $x \in \mathrm{int}(K)$.
On introduit $\mathcal{B} = \{\overline{V} \cap K \mid V \in \mathcal{V}(x)\}$. Montrons que c'est 1 base de vois. compacts
-> Les éléments de $\mathcal{B}$ sont des compacts en tant que fermés (intersection de fermés) inclus dans le compact K
-> Si $V \in \mathcal{V}(x)$, $x \in V \subset \overline{V}$ et comme $x \in K$, $x \in \overline{V} \cap K$. Ainsi tous les éléments de $\mathcal{B}$ sont bien des voisinages de x
-> Il reste à vérifier qu'il s'agit bien d'une base. Soit $V \in \mathcal{V}(x)$.
Par déf de vois, il existe $U \in \Theta$ tel que $x \in U \subset V$.
Par régularité il existe $U' \in \Theta$ tel que $x \in U' \subset \overline{U'} \subset U \subset V$.
Donc $\overline{U'} \cap K \subset V \cap K \subset V$. Or $U' \in \mathcal{V}(x)$ donc $\overline{U'} \cap K \in \mathcal{B}$
Ainsi $\mathcal{B}$ est bien une base de voisinages de x.
(b)$\Rightarrow$(a) Evident il suffit d'en choisir un dans la base.

40.3 **Déf** Si (X, Θ) est un espace topologique régulier. Soit $x_0 \in X$.
X est <u>localem^t compact en x_0</u> $\Leftrightarrow$ il existe un vois. compact de x_0
X est <u>localem^t compact</u> $\Leftrightarrow \forall x \in X$, X est localem^t compact en x.

40.4 **Pté** Soit E un $\mathbb{K}$-EVN. Notons B sa boule unité fermée i.e. $\{x \in E / \|x\|_E \leq 1\}$.
E est localement compact $\Leftrightarrow$ B est compacte.

<u>Preuve</u>: L'essentiel tient au fait que les translations et les homothéties sont des applications continues qui envoyent donc les compacts sur des compacts.
Si E est loc. compact on envoit une boule $\overline{B(0,r)}$ contenue dans un voisinage compact de 0, sur B par $x \mapsto \frac{1}{r}x$ (homothétie).
Réc. si B est compacte on peut l'envoyer autour de tt pt x_0 par $x \mapsto x + x_0$, exhibant ainsi un vois. compact de x_0.

40.5 <u>**Théorème de F. Riesz**</u> Soit E un $\mathbb{K}$-EVN. Soit B sa boule unité
E est de dimension finie $\Leftrightarrow$ B est compacte

<u>Preuve</u> $\Rightarrow$ En dim. finie les fermés bornés, comme B, sont compacts
$\Leftarrow$ Supposons B compacte. On peut alors la recouvrir par un nombre fini de boules de rayon $1/2$, de centre les $(x_j)_{j\in J}$. On pose <u>$F = \mathrm{Vect}\{x_j / j \in J\}$</u>
MQ <u>F dense dans E</u>. Soit $y \in E$. $u_0 = \frac{y}{\|y\|} \in B(0,1)$ donc il existe $j_1 \in J$ tel que $u_0 \in B(j_1, 1/2)$ alors, en posant $y_1 = \|y\| x_{j_1} \in F$ on a $\|y - y_1\| = \|y\| \|u_0 - x_{j_1}\| \leq \frac{1}{2}\|y\|$.
On itère cette construction c-à-d qu'on suppose avoir $y_i \in F$ tel que $\|y - y_i\| \leq \frac{1}{2^i}\|y\|$.
Soit $y = y_i$ alors on pose $y_{i+1} = y \in F$, soit $y \neq y_i$, on pose alors $y_{i+1} = \underbrace{y_i}_{\in F} + \underbrace{\|y - y_i\| x_{j_n}}_{\in F} \in F$
où $j_n \in J$ tel que $u_i = \frac{y - y_i}{\|y - y_i\|} \in B(j_i, 1/2)$. On a bien alors
$\|y - y_{n+1}\| = \|y - y_i - \|y - y_i\| x_{j_n}\| = \|y - y_i\| \|u_i - x_{j_n}\| \leq \frac{1}{2^i}\|y\| \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{i+1}}\|y\|$.
La suite ainsi construite approche y tt en étant dans F. On en déduit $\overline{F} = E$
Or F étant un $\mathbb{K}$-EV de dim finie ($\tilde{n} = rg(x_j)_{j\in J}$) où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est complet, F est complet donc en particulier fermé soit $F = \overline{F}$.
D'où finalem^t $E = F$ donc E est de dim. finie.