Théorème de Baire

Cf Gourdon p399.

Soit (X,d) un espace métrique. Notons Θ l'ensemble de ses ouverts.

42.0 **lemme** Soit $A \in \mathcal{P}(X)$. A est dense dans $X \Leftrightarrow \forall U \in \Theta,\ U \neq \emptyset \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset$

Preuve : $\Rightarrow$ Si A est dense. Considérons $U \in \Theta \setminus \{\emptyset\}$ un ouvert non vide.

Étant non vide, U admet au moins un élément x_0 et étant ouvert ce point lui est intérieur donc il existe $r_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\mathcal{B}(x_0, r_0) \subset U$. D'autre part la densité de A, soit le fait que mic $x_0 \in \bar{A}$, implique $\mathcal{B}(x_0, r_0) \cap A \neq \emptyset$.

Donc $A \cap U$ est non vide, car il contient $\mathcal{B}(x_0, r_0) \cap A$.

$\Leftarrow$ Réciproquement si tout ouvert non vide intersecte A. On considère $x_0 \in X$. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ $\mathcal{B}(x_0, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ puisque $\mathcal{B}(x_0, \varepsilon)$ est un ouvert non vide. Donc $x_0 \in \bar{A}$.

Ceci étant vrai pour x_0 quelconque on a finalem^t $X \subset \bar{A} \subset X$ soit $X = \bar{A}$, ou A dense.

42.1 **Théorème de Baire** Si (X,d) est complet alors toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense

Preuve Soit $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses. Notons $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ leur intersection.

Pour montrer la densité de A on va utiliser le critère ci-dessus : considérons donc U un ouvert non vide.

1) CONSTRUIRE $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On cherche à construire $(B_n = \mathcal{B}(x_n, r_n))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

→ $\underline{\forall n \in \mathbb{N}\quad r_n \leq 1/2^n}$ Δ_n

→ $\underline{\overline{B_0} \subset O_0 \cap U}$ $\star_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\underline{\overline{B_n} \subset O_n \cap B_{n-1}}$. $\star_n$

La densité de O_0 assure qu'il existe $x_0 \in O_0 \cap U$. Puisque $O_0 \cap U$ est ouvert (en tant qu'intersec$^{\circ}$ d'1 nbre fini d'ouverts) il existe aussi $\tilde{r}_0 \in]0, 2[$ tel que $\mathcal{B}(x_0, \tilde{r}_0) \subset O_0 \cap U$. Alors en posant $r_0 = \frac{\tilde{r}_0}{2}$ on a bien $\underline{r_0 \leq \frac{1}{2^0}}$ Δ_0

et $\underline{\overline{\mathcal{B}(x_0, r_0)} \subset O_0 \cap U}$. $\star_0$

Soit $n \geq 0$. On suppose avoir construit de tels B_i pour $i \leq n$.
La densité d'O_{n+1} assure qu'il intersecte l'ouvert B_n, on a donc l'existence de $x_{n+1} \in O_{n+1} \cap B_n$ et de $\tilde{r}_{n+1} \in]0, \frac{1}{2^n}[$ tel que $B(x_{n+1}, \tilde{r}_{n+1}) \subset O_{n+1} \cap B_n$
On pose alors $r_{n+1} = \frac{\tilde{r}_{n+1}}{2}$ ainsi $\underbrace{r_{n+1} < \frac{1}{2^{n+1}}}_{\Delta_{n+1}}$ et $\underbrace{\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subset O_{n+1} \cap B_n}_{*_n}$

Ainsi par récurrence on construit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2) EXHIBER UN ÉLÉMENT DE $A \cap U$

- À partir du rang $n \in \mathbb{N}$ tous les termes de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans B_n qui est de rayon $1/2^n$, et $(1/2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
- Par complétude de X elle cv, appelons x sa limite
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \geq n$ $x_k \in B_k \subset \cdots \subset B_n$ donc $x \in \overline{B_k}$

En particulier $x \in \overline{B_0} \subset O_0 \cap U$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $x \in \overline{B_n} \subset O_n$
Donc $x \in U \cap O_0 \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} O_n = U \cap A$. Donc $U \cap A \neq \emptyset$.

On en conclut que A est bien dense dans X.

Cor Si (X,d) est complet
42.2 alors toute union dén. de fermés d'int vide est aussi d'int. vide.

Preuve:
Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés d'int vide. On considère $(O_n)_{n\in\mathbb{N}} = (X \setminus F_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$\forall n \in \mathbb{N}$ O_n est ouvert car complémentaire d'un fermé et $\overline{O_n} = \overline{F_n^c} = (\mathring{F_n})^c = (\emptyset)^c = X$
donc O_n est dense. Le th de Baire assure alors que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ est dense soit
$X = \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n} = \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n^c}$ donc $\emptyset = X^c = \overset{\circ}{\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n^c\right)^c} = \overset{\circ}{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n^{cc}} = \mathrm{int}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right)$ □.

Cor Si (X,d) est complet
42.3 alors • $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fermés tq $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = X \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, \mathrm{int}(F_{n_0}) \neq \emptyset$ (a)
42.4 • Si les singletons sont d'int. vide, alors X n'est pas dénombrable (b)

42.5 Un espace vectoriel normé à base dénombrable infinie n'est pas complet (c)

(a) X étant nécessairement ouvert, il est d'intérieur lui m̂, (non vide car esp. métrique) la contraposée du résultat précédent assure alors que tous les fermés de la suite ne peuvent être tous d'int vide.

(b) X peut toujours s'écrire $X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$ et dans un esp. métrique un singleton est néc. fermé (penser à la caractérisation séquentielle). Si X était dénombrable, l'union ci-dessus serait dénombrable et alors on aurait, d'après (a) un singleton d'intérieur vide, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse. Donc X n'est pas dén.

(c) Soit E un EVN de base $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{K}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = \mathrm{Vect}(e_i \mid i \in [1..n])$, qui est, en tant que SEV de dim finie de E de dim ∞, fermé et d'int vide. Comme par définition de base on a $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, E ne peut être complet, sinon on aurait que l'un des F_n est d'int non vide IMP!

Rq On utilise ici les deux faits suivants:
Dans un EVN, les SEV de dim finie sont toujours fermés Cf 101.1
Dans un EVN de dim ∞ les SEV de dim finie sont tjrs d'int vide. Cf 101.2.