Équicontinuité et théorème d'Ascoli

46.1 **Déf** Soient (X_1, d_1) et (X_2, d_2) deux espaces métriques.
Soit $A \in \mathcal{P}(\mathcal{C}b(X_1, X_2))$ (A est un ens. de fc° continues bornées de X_1 dans X_2)

- A est <u>équicontinue</u> $\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in X_1, \exists \delta \in \mathbb{R}^{+*}, \underbrace{\forall f \in A}_{\delta \text{ indép. de } f}, f(\mathcal{B}(x,\delta)) \subset \mathcal{B}(f(x), \varepsilon)$

- A est <u>uniformément équicontinue</u> $\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \delta \in \mathbb{R}^{+*}, \underbrace{\forall x \in X_1}_{\delta \text{ indép. de } x}, \underbrace{\forall f \in A}_{\delta \text{ indép. de } f}, f(\mathcal{B}(x,\delta)) \subset \mathcal{B}(f(x), \varepsilon)$

46.2 **Pté** Sous ces notations A unif. équicontinue $\Rightarrow$ A équicontinue (a)
et si (X_1, d_1) est <u>compact</u>, A unif. équicontinue $\Leftrightarrow$ A équicontinue (b)

<u>démonstration</u> : (a) évident par inversion des quantificateurs.
(b). Par a le sens à montrer ici est "$\Leftarrow$".

Si (X_1, d) est compact et si A est équicontinue. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$.
Pour tout $x \in X_1$ il existe, par équicontinuité, $\delta_x \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que
$$\forall f \in A, \quad f(\mathcal{B}(x, \delta_x)) \subset \mathcal{B}(f(x), \varepsilon/2)$$
$X = \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}(x, \delta_x/2)$ donc par compacité de X il existe $N \in \mathbb{N}$
et $(x_j)_{j \in [1..N]} \in X^N$ tel que $X = \bigcup_{i=1}^{N} \mathcal{B}(x_j, \delta_{x_j}/2)$.
On pose $\delta = \min\{\delta_{x_j}/2 \mid j \in [1..N]\}$.
Soit $x \in X$. Il existe $k \in [1..N]$ tel que $x \in \mathcal{B}(x_k, \delta_{x_k}/2)$.
Soit $y \in \mathcal{B}(x, \delta)$. $d_1(x,y) \leq \delta \leq \frac{1}{2}\delta_{x_k}$.
$$d_1(x_k, y) \leq d_1(x_k, x) + d_1(x,y) \leq \delta_{x_k}/2 + \delta_{x_k}/2 = \delta_{x_k}.$$
Soit $f \in A$. On a donc $f(y) \in f(\mathcal{B}(x_k, \delta_{x_k})) \subset \mathcal{B}(f(x_k), \varepsilon/2)$.
De plus puisque $x \in \mathcal{B}(x_k, \delta_{x_k}/2) \subset \mathcal{B}(x_k, \delta_{x_k}/2)$ on a, aussi $f(x) \in f(\mathcal{B}(x_k, \delta_{x_k})) \subset \mathcal{B}(f(x_k), \varepsilon/2)$
Donc $d_2(f(x), f(y)) \leq 2 \times \varepsilon/2 = \varepsilon$.
donc $f(y) \in \mathcal{B}(f(x), \varepsilon)$.
Soit, puisque y est quelconque dans $\mathcal{B}(x,\delta)$, $f(\mathcal{B}(x,\delta)) \subset \mathcal{B}(f(x), \delta)$ et ce, pour tout $f \in A$ et pour tout $x \in X$, δ étant indépendant de x et de f.
D'où l'<u>uniforme</u> équicontinuité

46.3 **Pté** Sous les notations précédentes. Si X_1 est compact
$\bar{A}$ est équicontinue $\Leftrightarrow$ A est équicontinue

démonstration "$\Rightarrow$" est clair car une propriété vraie $\forall f \in \bar{A}$ l'est à fortiori $\forall f \in A$
"$\Leftarrow$" Supposons A équicontinue donc uniformément équicontinue
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. Il existe $\delta \in \mathbb{R}^{+*}$ tq $\forall f \in A, \forall x \in X$ $f(\mathcal{B}(x,\delta)) \subset \mathcal{B}(f(x), \varepsilon/3)$
Soit $f \in \bar{A}$. Il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ tel que f_n converge vers f dans $\mathcal{C}_b(X_1, X_2)$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_N - f\|_{\mathcal{C}_b(X_1,X_2)} \leq \varepsilon/3$.
Soit $(x,y) \in X^2$ tel que $d_1(x,y) \leq \delta$.

$d_2(f(x), f(y)) \leq d_2(f(x), f_N(x)) + d_2(f_N(x), f_N(y)) + d_2(f_N(y), f(y))$
$\leq \|f - f_N\| + \varepsilon/3$ (car $f_N \in A$ et $d(x,y) \leq \delta$) $+ \|f - f_N\|$
$\leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$.

Donc $\forall f \in \bar{A}, \forall x \in X$ $f(\mathcal{B}(x,\delta)) \in \mathcal{B}(f(x), \varepsilon))$
c'est à dire $\bar{A}$ est uniformément équicontinue, (dc équicontinue

46.4 **Déf** Une partie est dite relativement compacte si son adhérence est compacte.

46.5 **Déf** Sous les notations précédentes
A est ponctuellement relativement compacte $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X$, $\{f(x) | f \in A\}$ est relativement compacte
(c'est un peu l'inverse de "équi")

46.6 **Pté** "réciproque du théorème d'Ascoli"

(Cette propriété correspond à la réciproque du th. d'Ascoli qu'on énoncera ci-après, mais dans un sens plus large. c-à-d, avec moins d'hyp.)

Soit (X, d_1) un e.m. compact.
Soit (X_2, d_2) un espace métrique. Soit $A \in \mathcal{P}(\mathcal{C}_b(X_1, X_2))$.

$\bar{A}$ est compacte $\Rightarrow$ $\begin{cases} A \text{ est (unif) équicontinue} \\ \text{et } A \text{ est ponctuellement relativement compacte} \end{cases}$

<u>démonstration</u> • $\forall f \in \bar{A}$ f est continue sur le compact X_1 donc <u>unif.</u> continue.

c-à-d $\forall f \in \bar{A}, \exists \alpha_f \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in X, f(\mathcal{B}(x, \alpha_f)) \subset \mathcal{B}(x, \varepsilon/3)$.

α_f indep de x.

En considérant les α_f définis par la proposition ci-dessous on a

$\bar{A} \subset \bigcup_{f\in\bar{A}} \mathcal{B}(f, \varepsilon/3)$, par compacité de $\bar{A}$ il existe donc $N \in \mathbb{N}$ et $(f_i)_{i\in[1..N]} \in \bar{A}^{\mathbb{N}}$ tel que $A \subset \bigcup_{i=1}^{N} \mathcal{B}(f_i, \varepsilon/3)$.

On pose $\delta = \min\{\alpha_{f_i} \mid i \in [1..N]\}$.

Soit $f \in \bar{A}$. Il existe $k \in [1..N]$ tel que $f \in \mathcal{B}(f_k, \varepsilon/3)$.

Soit $(x,y) \in X_1^2$ tel que $d(x,y) < \delta$

$d_2(f(x), f(y)) \leq d_2(f(x), f_k(x)) + d_2(f_k(x), f_k(y)) + d_2(f_k(y), f(y))$

$\leq \|f - f_k\| + \varepsilon/3$ car $d(x,y) < \delta \leq \alpha_{f_k}$ $+ \|f - f_k\|$

$\leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$

Donc $\forall f \in \bar{A}, \forall x \in X_1, f(\mathcal{B}(x, \delta)) \subset \mathcal{B}(f(x), \varepsilon)$.

D'où l'uniforme équicontinuité de $\bar{A}$, et d'après 46.3 celle de A.

• Soit $x \in X$. On pose $\Lambda_x = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_b(X_1, X_2) \to X_2 \\ f \longmapsto f(x) \end{pmatrix}$.

$\forall (f,g) \in \mathcal{C}_b(X_1, X_2)^2$ $d_2(\Lambda_x(f), \Lambda_x(g)) = d_2(f(x), g(x)) \leq \|f-g\|_{\mathcal{C}_b(X_1,X_2)}$

Donc Λ_x est 1-lip et alors unif. continue et surtout <u>continue</u>.

$\Lambda_x(\bar{A})$ est alors compacte en tant qu'image d'un compact par une application continue. $\Lambda_x(\bar{A}) = \{f(x) \mid f \in \bar{A}\}$.

On veut montrer que $\overline{\{f(x) \mid f \in A\}} = \{f(x) \mid f \in \bar{A}\}$.

→ Soit $a \in \overline{\{f(x) \mid f \in A\}}$.

Il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $a = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bar{A}^{\mathbb{N}}$ donc par compacité de $\bar{A}$ il existe une extraction φ telle que $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f \in \bar{A}$.

Alors nécessairement $(f_{\varphi(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$, or $(f_{\varphi(n)}(x))$ étant extraite de $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers a, par unicité de la limite $a = f(x) \in \{g(x) \mid g \in \bar{A}\}$.

D'où $\overline{\{f(x) \mid f \in A\}} \subset \{f(x) \mid f \in \bar{A}\}$.

→ Soit $a \in \{f(x) \mid f \in \bar{A}\}$. Il existe $f \in \bar{A}$ tel que $a = f(x)$, et il existe alors aussi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cv vers f.

Alors $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x) = a$ donc $a \in \overline{\{g(x) \mid g\in A\}}$
d'où $\{g(x) \mid x\in \overline{A}\} \subset \overline{\{g(x) \mid g\in A\}}$.

Par double inclusion $\overline{\{f(x) \mid x\in A\}} = \Lambda_x(A)$ est compact, et ce pour x quelconque dans X, donc A est ponctuellem^t relativem^t compacte.

46.7 Théorème d'Ascoli (version Banach)

Soit $(E, \|\ \|_E)$ un espace de Banach. Soit (X,d) un espace métrique compact.
Soit $A \in \mathcal{P}(\mathcal{C}(X,E))$.

$\left.\begin{array}{l}\text{A est (uniformém}^t\text{) équicontinue} \\ \text{A est ponctuellm}^t\text{ relativem}^t\text{ compacte}\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \overline{A}$ est compacte.

démonstration ⇐ correspond à la pté préc.

"⇒". E étant un espace de Banach, $\mathcal{C}(X,E)$ muni de la norme sup est aussi un espace de Banach (cf 13). D'après 35.2 l'adhérence d'une partie est donc compacte pourvu qu'on puisse recouvrir la partie par un nombre fini de boules de même rayon, aussi petit soit-il.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. Par unif. équicontinuité de A, il existe $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que
$\forall f\in A, \forall x\in X, f(\mathcal{B}(x,\alpha)) \subset \mathcal{B}(f(x), \varepsilon/3)$.

$X = \bigcup_{x\in X} \mathcal{B}(x,\alpha)$. Donc par compacité de X, il existe $N\in\mathbb{N}$ et $(x_j)_{j\in[1..N]}$ tel que $X = \bigcup_{j=1}^{N} \mathcal{B}(x_j, \alpha)$.

Pour $j\in[1..N]$ on pose $B_j = \{f(x_j) \mid f\in A\}$. Par compacité relative ponctuelle de A, $\overline{B_j}$ est compacte, donc $\prod_{i=1}^{N} \overline{B_j}$ est aussi compact en tant que produit fini de compacts.

On pose $B = \{(f(x_j))_{j\in[1..N]} \mid f\in A\}$. $B \subset \prod_{i=1}^{N} B_i \subset \prod_{i=1}^{N} \overline{B_i}$ et $\overline{B} \subset \overline{\prod_{i=1}^{N} \overline{B_i}} = \prod_{i=1}^{N} \overline{B_i}$
Donc $\overline{B}$ est une partie fermée d'un compact, c'est donc elle même une partie compacte. (un compact est fermé)

Or $B \subset \bigcup_{f\in A} \mathcal{B}((f(x_j))_{j\in[1..N]}, \varepsilon/3)$ donc il existe $M\in\mathbb{N}$ et $(f_\ell)_{\ell\in[1..M]}$ tel que $B \subset \bigcup_{\ell=1}^{M} \mathcal{B}((f_\ell(x_j))_{j\in[1..N]}, \varepsilon/3)$.

Soit $f \in A$. $(f(x_i))_{i \in [1..N]} \in B$ donc il existe $k \in [1..M]$ tel que $(f(x_i))_{i \in [1..N]} \in \mathcal{B}((f_k(x_i))_{i \in [1..N]}, \varepsilon/3)$ ce qui implique $\| (f(x_i))_{i\in[1..N]} - (f_k(x_i))_{i \in [1..N]} \|_{E^N} \leq \varepsilon/3$ et donc $\forall i \in [1..N]\ \|f(x_i) - f_k(x_i)\|_E \leq \varepsilon/3$.

Soit $x \in X$. Il existe $j \in [1..N]$ tel que $x \in \mathcal{B}(x_j, \alpha)$ soit $d(x_j, x) < \alpha$

$$\|f(x) - f_k(x)\| \leq \underbrace{\|f(x) - f(x_j)\|}_{\substack{\leq \varepsilon/3 \\ \text{car } d(x, x_j) \leq \varepsilon/3 \\ \text{et } f \in A}} + \underbrace{\|f(x_j) - f_k(x_j)\|}_{\leq \boxed{\varepsilon/3}} + \underbrace{\|f_k(x_j) - f_k(x)\|}_{\leq \varepsilon/3\ \boxed{\text{car } d(x, x_j) < \alpha \text{ et } f_k \in A}}$$

$\leq \varepsilon$ donc $\forall x \in X\ \|f(x) - f_k(x)\| \leq \varepsilon$ soit $\|f - f_k\|_{\mathcal{C}(X,E)} \leq \varepsilon$

Donc $A \subset \bigcup_{i=1}^{M} \mathcal{B}(f_k, \varepsilon)$, et ce aussi petit qu'on ait fixé ε.

Parce que $\mathcal{C}(X,E)$ est de Banach et d'après 35.2 on en déduit $\bar{A}$ est compacte

On va ici donner une version plus générale du théorème d'Ascoli.
Ne prenez pas peur : si la preuve est longue c'est que j'écris ce que j'aurais expliqué oralement avant de développer les arguments.

Lemme Si X est un espace métrique et compact alors X est nécessairement séparable.

Preuve On cherche ici à construire une famille dénombrable dense $\mathcal{D}$.
Elle doit donc vérifier $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in X, \exists a \in \mathcal{D}, d(a,x) \leq \varepsilon$.
Ce qui équivaut à $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ——— $\leq 1/n$.
On s'est, en quelque sorte, ramené à un nombre dénombrable de cas à traiter : pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{D}$ doit contenir les centres d'une famille de boules de rayons $\leq 1/n$ qui recouvre X.
On va obtenir cette famille par compacité. Rigoureusement :
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ $X \subset \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}(x, 1/n)$. Par compacité de X il existe $(x_i^n)_{i \in [1..k_n]} \in X$ tel que $X \subset \bigcup_{i=1}^{k_n} \mathcal{B}(x_i^n, 1/n)$.
On pose alors $\mathcal{D} = \{x_i^n \mid \underbrace{n \in \mathbb{N}^*, i \in [1..k_n]}_{\text{partie de } \mathbb{N}^2 \text{ dénombrable}}\}$.
$\mathcal{D}$ est bien dénombrable et dense dans X.
Par définition on en déduit que X est séparable

Théorème d'Ascoli (général) Soit (X, d_1) un espace métrique compact.
Soit (X_2, d_2) un ———. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(X_1, X_2)$.

$$\mathcal{A} \text{ relativement compacte} \iff \begin{cases} \mathcal{A} \text{ équicontinue sur } X \ *_1 \\ \mathcal{A} \text{ ponctuellement relativement compacte } *_2 \end{cases}$$

Preuve On notera, pour $x \in X$, $\mathcal{A}_x = \{f(x) \mid f \in \mathcal{A}\}$.

$\Rightarrow$ Supposons $\bar{\mathcal{A}}$ compacte. Soit $x \in X$ et $\mathcal{W}_x = \begin{pmatrix} \mathcal{C}(X_1, X_2) \longrightarrow X_2 \\ f \longmapsto f(x) \end{pmatrix}$.
$\mathcal{W}_x$ est continue (car $d_2(f(x), g(x)) \leq d_\infty(f,g)$ et ce pour tout $(f,g) \in \mathcal{C}(X_1, X_2)$).

Or $\mathcal{A}x$ est justement $ev_x(\mathcal{A})$ et donc $\mathcal{A}x \subset ev_x(\overline{\mathcal{A}})$ qui ☼
est un compact en tant qu'image continue d'un compact.
Sachant qu'un fermé dans un compact est compact, et donc
qu'un ensemble inclus dans un compact est relativement compact,
on en déduit que $\mathcal{A}x$ est relativement compacte d'où $\star_2$.

Pour montrer $\star_1$, on considère $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ et on cherche $\eta \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que
$\forall x \in X, \forall y \in \mathcal{B}_1(x, \eta), d_2(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$.
Par compacité de $\overline{\mathcal{A}}$ ☼ il existe $(f_i)_{i\in[1..K]} \in \mathcal{A}^K$ tq $\mathcal{A} \subset \bigcup_{i=1}^{K} \mathcal{B}(f_i, \varepsilon/3)$.
Or pour tout $i \in [1..K]$ f_i est unif. continue car continue sur
K compact, il existe donc $\eta_i \in \mathbb{R}^{+*}$ tq $\forall x \in X \; f_i(\mathcal{B}(x, \eta_i)) \subset \mathcal{B}(f_i(x), \frac{\varepsilon}{3})$
On pose alors $\eta = \min_{i\in[1..K]} \eta_i$.
Pour $f \in \mathcal{A}$ il existe $i_0 \in [1..K]$ tq $f \in \mathcal{B}(f_{i_0}, \varepsilon/3)$ (boule pour la distance ∞)
Alors $\forall x \in X, \forall y \in \mathcal{B}(x, \eta), d_2(f(x), f(y)) \leq \underbrace{d_2(f(x), f_{i_0}(x))}_{\substack{\leq d_\infty(f, f_{i_0}) \\ \leq \varepsilon/3}} + \underbrace{d_2(f_{i_0}(x), f_{i_0}(y))}_{\boxed{\substack{\leq \varepsilon/3 \text{ car} \\ d_1(x,y) \leq \eta \leq \eta_{i_0}}}} + \underbrace{d_2(f_{i_0}(y), f(y))}_{\leq \varepsilon/3}$

Donc $\mathcal{A}$ est bien équicontinue, et même unif. équicontinue puisque
le η ne dépend ni de f ni de x. D'où $\star_1$

$\Leftarrow$ D'après le lemme on a la séparabilité de X, donc il existe
$\mathcal{D} = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}^*\}$ une partie de K, dense dans X (pour d_1) et dénombrable.
Pour montrer ☼ on considère $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$,
et on veut montrer qu'elle admet une valeur d'adhérence.
« Pour extraire on va s'appuyer sur le procédé classique d'extraction
diagonale, qui permet en quelques sortes de faire un nombre
dénombrable d'extractions "simultanément", et on se ramène à ce
nombre dénombrable grâce à $\mathcal{D}$. On va utiliser que pour chaque
x_i de $\mathcal{D}$ on sait extraire de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge, et combiner
toutes ces extractions pour que ça converge sur tous les $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}^*\}$ »
Allons-y rigoureusement, techniquement, proprement :

extrac° diagonale

Soit H_k la propriété "il existe Ψ_k une extraction tq $\forall i \in [1..k]$ $(f_{\Psi_k(n)}(x_i))_{n\in\mathbb{N}}$ cvg".
Au rang 0, la propriété est clairement vérifiée, pour $\Psi_0 = id_{\mathbb{N}}$.
Supposons la propriété H_{k-1} vérifiée pour $k \in \mathbb{N}^*$.
$(f_{\Psi_{k-1}(n)}(x_k))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de A_{x_k} qui par $*_2$ est rel compact.
Donc il existe φ_k une extraction qui fait converger cette suite dans X_2.
On pose alors $\Psi_k = \Psi_{k-1} \circ \varphi_k$. Ainsi $(f_{\Psi_k(n)}(x_k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, ainsi que les $(f_{\Psi_k(n)}(x_i))_{n\in\mathbb{N}}$ pour $i \in [1..k-1]$ puisqu'elles m̃ extraites de suites convergentes par H_{k-1}.
Par récurrence on obtient $(\Psi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant les $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
On pose alors $\Psi = n \mapsto \Psi_n(n)$. On vérifie que c'est une extraction.
De plus pour $k \in \mathbb{N}^*$ $(f_{\Psi(n)}(x_k))_{n\geq k}$ est extraite de $(f_{\Psi_k(n)}(k))_{n\in\mathbb{N}}$ et converge donc.
Ainsi $\forall x$ $(f_{\Psi(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et on appelle $f(x)$ la limite

« On aimerait étendre f, pour l'instant défini sur $\mathcal{D}$, à X_1, mais le théorème de prolongement des applications unif. continues suppose la complétude de l'espace d'arrivée, or ici on n'a pas X_2 complet. À la place on va utiliser la complétude de chacun des A_x, qui provient de $*_2$ puisque compact $\Rightarrow$ complet. L'étape suivante étant de MQ $(f_{\Psi(n)})$ converge uniformément vers f, on va se ramener non pas à la convergence sur $\mathcal{D}$ entier, mais sur un nombre fini de points seulement - par compacité - pour pouvoir après prendre un max sans pb »

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. D'après $*_1$ et puisque X_1 est compact, A est unif. équicontinue.
Il existe donc $\eta \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\forall x \in X, \forall g \in A, g(\mathcal{B}(x,\eta)) \subset \mathcal{B}(g(x), \varepsilon/3)$.
Par densité de $\mathcal{D}$ on a $X \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \mathcal{B}(x_k, \eta)$, mais par compacité on peut extraire de ce recouvrem^t un sous-rec. fini $\bigcup_{\ell=1}^{K} \mathcal{B}(y_\ell, \eta)$ où $\forall \ell$ $y_\ell \in \mathcal{D}$

Soit $x \in X_1$. Il existe $\ell \in [1..K]$ tel que $x \in \mathcal{B}(y_\ell, \eta)$.
Puisque $y_\ell \in \mathcal{D}$, $(f_{\Psi(n)}(y_\ell))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et est donc une suite de Cauchy.

Il existe donc $N_\ell \in \mathbb{N}$ tq $\forall m \geq n \geq N_\ell$: $\underbrace{d_2(f_{\varphi(n)}(y_\ell), f_{\varphi(m)}(y_\ell)) \leq \varepsilon/3}$

Donc $\forall n \geq m \geq N_\ell$ $d_2(f_{\varphi(n)}(x), f_{\varphi(m)}(x)) \leq \underbrace{d_2(f_{\varphi(n)}(x), f_{\varphi(n)}(y_\ell))}_{\leq \varepsilon/3 \text{ car } d_1(x,y) \leq \eta \text{ et } f_{\varphi(n)} \in \mathcal{A}} + \underbrace{d_2(f_{\varphi(n)}(y_\ell), f_{\varphi(m)}(y_\ell))}_{\leq \varepsilon/3} + \underbrace{d_2(f_{\varphi(m)}(y_\ell), f_{\varphi(m)}(x))}_{\leq \varepsilon/3}$

$\leq \varepsilon$

Ainsi $(f_{\varphi(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\overline{\mathcal{A}x}$ qui est complet car compact, donc elle converge et on appelle $f(x)$ sa limite.

De plus en posant $N = \max_{\ell\in[1..K]} N_\ell$ on peut faire la m̂ majoration pour tous les x en même temps, c-à-d

$\forall x \in X, \forall m \geq n \geq N, d_2(f_{\varphi(n)}(x), f_{\varphi(m)}(x)) \leq \varepsilon$.

En passant à la limite quand $m \to +\infty$ on obtient

$\forall x \in X, \forall n \geq N, d_2(f_{\varphi(n)}(x), f(x)) \leq \varepsilon$, ce qui assure bien la cvg. unif. de $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ vers f, et de ce fait $f \in \mathcal{C}(X, X_2)$ comme limite uniforme de f' continues.