Intégrale de Wallis

Une intégrale de Wallis est une intégrale de la forme

$$\int_0^a \sin^k(t)\,dt \quad \text{où } k \in \mathbb{N} \text{ et } a \in \{\pi/2, \pi\}.$$

$\forall k \in \mathbb{N}, \forall a \in \{\pi/2, \pi\}$ on pose $I_{k,a} = \int_0^a \sin^k(t)\,dt$.

1) Trouver une formule de récurrence grâce à l'Ipp.

Soit $k \geq 2$ et entier. Soit $a = \pi/2$ ou π.

$$I_{k,a} = \int_0^a \sin^k(t)\,dt$$

$$= \int_0^a \sin^{k-1}(t)\,\sin(t)\,dt$$

par Ipp avec $u' = \sin(t)$, $v = \sin^{k-1}(t)$, $u = -\cos(t)$, $v' = (k-1)\cos(t)\sin^{k-2}(t)$

$$= \left[-\cos(t)\sin^{k-1}(t)\right]_0^a - \int_0^a (k-1)\cos(t)\sin^{k-2}(t) \times (-\cos(t))\,dt$$

Puisque $k \geq 2$ $k-1 \geq 1$ donc $-\cos(0)\sin^{k-1}(0) = 0$ et alors
$[-\cos(t)\sin^{k-1}(t)]_0^a = \cos(a)\sin^{k-1}(a)$.

- Si $a = \pi/2$ $\cos(a) = 0$
- Si $a = \pi$ $\sin^{k-1}(a) = 0$

Donc $I_{k,a} = \int_0^a (k-1)\cos^2(t)\sin^{k-2}(t)\,dt$ or $\cos^2 + \sin^2 = 1$

$$= (k-1)\int_0^a (1-\sin^2(t))\sin^{k-2}(t)\,dt$$

$$= (k-1)\left[\int_0^a \sin^{k-2}(t)\,dt - \int_0^a \sin^k(t)\,dt\right]$$

Donc $I_{k,a} = (k-1) I_{k-2,a} - (k-1) I_k$

soit $I_{k,a}(k-1+1) = (k-1) I_{k-2,a}$

d'où

$\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ $\forall a \in \{\pi/2, \pi\}$	$I_{k,a} = \frac{k-1}{k} I_{k-2,a}$

2) Trouver une formule explicite en fonction des premiers termes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

- Si n est paire, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2p$.

$$I_{2p,a} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2,a} = \frac{2p-1}{2p} I_{2(p-1),a}$$

$$= \prod_{k=1}^{p} \frac{2k-1}{2k} I_{2(p-p),a} = \frac{\prod_{k=1}^{p} 2k-1 \times \prod_{k=1}^{p} 2k}{\prod_{k=1}^{p} 2k \times \prod_{k=1}^{p} 2k} I_{0,a}$$

$$= \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} I_{0,a}$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^* \quad I_{2p,a} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} I_{0,a}}$$

- Si n est impaire il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p+1$.

$$I_{2p+1,a} = \frac{2p+1-1}{2p+1} I_{2p+1-2,a} = \frac{2p}{2p+1} I_{2(p-1)+1,a}$$

$$= \frac{\prod_{k=1}^{p} 2k}{\prod_{k=1}^{p} 2k+1} \times \frac{\prod_{k=1}^{p} 2k}{\prod_{k=1}^{p} 2k} \times I_{2(p-p)+1,a}$$

$$= \frac{(2^p p!)^2}{(2p)!} I_{1,a}$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N} \quad I_{2p+1,a} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p)!} I_{1,a}}$$

3) Conclure selon a

Si $a = \pi/2$, $I_0 = \int_0^{\pi/2} \sin^0(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} dt = \pi/2$

et $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(t)\,dt = \left[-\cos(t)\right]_0^{\pi/2} = \cos(0) - \cos(\pi/2) = 1$

alors $\boxed{\forall p \in \mathbb{N} \quad I_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p)!}}$

Si $a = \pi$, $I_0 = \pi$ et $I_1 = \cos(0) - \cos(\pi) = 1 - (-1) = 2$

alors $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^* \quad I_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \pi \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = \frac{2^{2p+1} (p!)^2}{(2p)!}}$