Extractions et valeurs d'adhérences (dans un espace métrique)

Soit (X,d) un espace métrique.

50.1 **Rappels** • φ est une extraction $\Leftrightarrow$ $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et $n \mapsto \varphi(n)$ est st. croissante.

50.2 • $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite ou sous-suite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\Leftrightarrow$ il existe φ une extraction telle que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$

50.3 **Déf** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$. Soit $x \in X$.

$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ c-à-d $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x dans (X,d)

$\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 0$

50.4 **Pté** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$. Soit $(x,y) \in X^2$

$$\left.\begin{array}{l} x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \\ x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} y \end{array}\right\} \Rightarrow x = y$$

« unicité de la limite »

Démonstration : Si $x \neq y$ on pose $\varepsilon = d(x,y) \in \mathbb{R}^{+*}$.

Puisque $x_n \to x$ il existe N_1 tq $\forall n \geq N_1$, $x_n \in \mathcal{B}(x, \varepsilon/3)$

——— $x_n \to y$ ——— N_2 ———$_2$ $x_n \in \mathcal{B}(y, \varepsilon/3)$.

Alors pour $n = \max(N_1, N_2)$ on a $x_n \in \mathcal{B}(x, \varepsilon/3) \cap \mathcal{B}(y, \varepsilon/3)$

et alors $\varepsilon = d(x,y) \leq d(x,x_n) + d(x_n,y) \leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \frac{2}{3}\varepsilon$. IMP

d'où $x = y$.

50.5 **Déf** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$. Soit $a \in X$.

a est valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans (X,d)

$\Leftrightarrow$ il existe φ une extraction telle que $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ cv. vers a ds (X,d)

Remarque : On notera $\mathrm{adh}((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mais ⚠ $\mathrm{adh}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \neq \overline{\{x_n / n\in\mathbb{N}\}}$.

ex dans $(\mathbb{N}, |\,|)$ et pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a $\mathrm{adh}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \emptyset$

mais $\overline{\{x_n / n\in\mathbb{N}\}} = \mathbb{N}$.

50.6 **Pté** Sous ces notations

$a \in adh((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N, \; d(a, x_n) \leq \varepsilon$

aut. dit $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, $\mathcal{B}(a,\varepsilon)$ contient une infinité de termes de la suite

<u>démo</u> <u>Si $a \in adh((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$</u>, il existe φ une extraction telle que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.
c-à-d tq $d(a, x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. Il existe donc $P \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq P$, $d(a, x_{\varphi(p)}) \leq \varepsilon$. Soit $N \in \mathbb{N}$. On pose $n = \varphi(max(N, P))$ ainsi $n \geq \varphi(N) \geq N$ et $n \geq \varphi(P) \geq P$ donc $d(a, x_n) \leq \varepsilon$.
<u>Réciproquement</u> si $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, d(a, x_n) \leq \varepsilon$ on peut construire une extraction φ telle que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$. En effet on pose $\varphi(0) = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{1}{n} \in \mathbb{R}^{+*}$ donc il existe $\varphi(n) \geq \varphi(n-1)+1$ tel que $d(a, x_{\varphi(n)}) \leq 1/n$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} d(a, x_{\varphi(n)}) \leq \lim\limits_{n\to+\infty} 1/n = 0$
donc $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et $a \in adh((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

50.7 = 49.12 **Déf** Soit $A \in \mathcal{P}(X)$.

A est une partie compacte de $(X, d) \Leftrightarrow \forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, \; adh((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) \cap A \neq \emptyset$

« A est compacte ssi de tte suite d'éléments de a, on peut extraire une suite qui converge dans A ».

50.8 **Pté** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$. Soit $a \in X$.

- $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \Rightarrow adh((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \{a\}$
- $\left.\begin{array}{l}(X, d) \text{ est compact} \\ adh((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \{a\}\end{array}\right\} \Rightarrow x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$

<u>Dém</u> • Si $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$. Soit $a' \in adh((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$. Il existe une extraction φ tq $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a'$.
or $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ (En effet pour $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N \; d(x_{\varphi(n)}, a) \leq \varepsilon$ et alors $\forall n \geq N$, $\varphi(n) \geq \varphi(N) \geq N$ donc $d(x_{\varphi(n)}, a) \leq \varepsilon$)
Par unicité de la limite $a = a'$. D'où $adh((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \{a\}$.

• Supposons $\left\{\begin{array}{l}(X,d) \text{ compact} \\ adh((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \{a\}\end{array}\right.$ et $x_n \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} a$. Il existe alors $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ tq $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N$, $x_n \notin \mathcal{B}(a, \varepsilon)$
On peut donc construire une extraction Φ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_{\Phi(n)} \notin \mathcal{B}(a, \varepsilon)$.
Par compacité de X il existe ψ une extraction telle que $x_{\Phi\circ\psi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a' \in E$
et puisque $(x_{\Phi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $a' \in adh((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \{a\}$ donc $a' = a$
IMPOSSIBLE car $d(x_{\Phi\circ\psi(n)}, a) \geq \varepsilon$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$).