Théorème de Dini

cf Hirsch/Lacombe p 25/26.

5.1.1 **Théorème de Dini**

Soit (X,d) un espace métrique compact. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$

$$\left.\begin{array}{l} \forall x\in X,\ f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) \\ \forall x \in X\ (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \nearrow \\ x\mapsto f(x) \text{ continue sur } X \end{array}\right\} \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

" Sur un compact une suite de f° continues croissante qui cv simplem^t vers une f° continue cv en fait unif "

Preuve Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}^{+*}$.

Pour tout $x\in X$ $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ tend en croissant vers $f(x)$ donc il existe $n_x\in\mathbb{N}$ tel que $f_n(x) > f(x) - \varepsilon/2$ $\star_1$ pour tout $n\geq n_x$.

Par hypothèse f est continue et X compact donc uniformement continue.

Il existe donc $\alpha_f\in\mathbb{R}^{+*}$ tel que $\forall (x,x')\in X^2,\ d(x,x')\leq \alpha_f \Rightarrow |f(x)-f(x')|\leq \varepsilon/4$ $\star_2$

De même pour tout $x\in X$ f_{n_x} est continue donc unif. continue sur X, il existe alors $\alpha_{n_x}\in\mathbb{R}^{+*}$ tel que $\forall (y,y')\in X^2\ d(y,y')\leq \alpha_{n,x} \Rightarrow |f_{n_x}(y) - f_{n_x}(y')|\leq \varepsilon/4$ $\star_3$

On pose $\alpha_x = \min(\alpha_f, \alpha_{n,x})$.

$\bigcup_{x\in X} B(x,\alpha_x)$ est un recouvrement du compact X par des ouverts.

Il existe donc $k\in\mathbb{N}$ et $(x_i)_{i\in[1..k]}\in X^k$ tq $X=\bigcup_{i=1}^{k} B(x_i,\alpha_{x_i})$. On pose $n_0 = \max_{i\in[1..k]} n_{x_i}$

Soit $x\in X$. Il existe $j\in[1..k]$ tel que $x\in B(x_j,\alpha_{x_j})$.

$$\begin{aligned}
\forall n\geq n_0\quad f_n(x) &\geq f_{n_0}(x) && \text{car } f_n(x)\nearrow \\
&\geq f_{n_{x_j}}(x) && \text{car } f_n(x)\nearrow \text{ et } n_0=\max_{i\in[1..k]} n_{x_i} \\
&= f_{n_{x_j}}(x) - f_{n_{x_j}}(x_j) + f_{n_{x_j}}(x_j) \\
&\geq -|f_{n_{x_j}}(x) - f_{n_{x_j}}(x_j)| + f(x_j) - \varepsilon/2 && \star_1 \\
&\geq -\varepsilon/4 + f(x_j) - f(x) + f(x) - \varepsilon/2 && \star_3 \text{ car } d(x,x_j)\leq\alpha_{x_j}\leq\alpha_{n_{x_j}} \\
&\geq f(x) - |f(x_j)-f(x)| - 3\varepsilon/4 \\
&\geq f(x) - \frac{\varepsilon}{4} - 3\varepsilon/4 && \star_2 \text{ car } d(x,x_j)\leq\alpha_{x_j}\leq\alpha_f \\
&\geq f(x) - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Puisque $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est $\nearrow$ on a gratuitement $\forall n \geq n_0$ $f_n(x) \leq f(x)+\varepsilon$.
Donc $\forall n \geq n_0$ $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Et puisque n_0 est independant du x on a $\forall n \geq n_0$ $\|f_n - f\| \leq \varepsilon$. D'où $\|f_n - f\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Autrement dit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

51.2. Rq L'hypothèse de continuité sur la limite simple est indispensable.
En effet sur $X=[0,1]$ la suite $(x \mapsto -x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite $\nearrow$ de f° continue mais sa limite simple est $\left(x \mapsto \begin{cases}1 & \text{si } x=1 \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\right)$ qui n'est pas continue et qui ne peut dc ê la limite unif. de f° continues !

51.3 Application La valeur absolue sur $[-1,1]$ est la limite uniforme des fonctions polynomiales $\begin{cases} P_0 = 0 \\ \forall n\in\mathbb{N}\ P_{n+1} = x \mapsto P_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - P_n^2(x)) \end{cases}$

Preuve Montrons d'abord par reccurence sur n que $\forall x \in [-1,1]$ $0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq |x|$

↳ pour $n=0$ $P_n(x)=0$ et $P_{n+1}(x) = \frac{1}{2}x^2 \leq x^2 = |x|^2 \leq |x|$ car $|x|\leq 1$.
donc on a bien $0 \leq P_0(x) \leq P_{0+1}(x) \leq |x|$.

↳ Soit $n \geq 0$. On suppose que la propriété est vraie au rang n-1
Soit $x\in[-1,1]$.
- $P_n(x) \leq |x|$ donc $P_n^2(x) \leq |x|^2 = x^2$ donc $\frac{1}{2}(x^2 - P_n^2(x)) \geq 0$
donc $P_{n+1}(x) \geq P_n(x) \geq 0$.
- $P_{n+1}(x) = |x| - |x| + P_n(x) + \frac{1}{2}(|x|^2 - P_n(x)^2)$

$$= |x| - (|x| - P_n(x)) + \frac{1}{2}(|x| + P_n(x))(|x| - P_n(x))$$

$$= |x| - \underbrace{(|x| - P_n(x))}_{\geq 0}\underbrace{\Bigg(1 - \underbrace{\frac{1}{2}(\underbrace{|x|}_{\leq 1} + \underbrace{P_n(x)}_{\leq |x| \leq 1})}_{\leq 1}\Bigg)}_{\geq 0}$$ en utilisant l'HR

$$\leq |x|$$

On a bien $\forall x\in[-1,1]$ $0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq |x|$.

On en déduit que pour tout $x\in[-1,1]$ $P_n(x)$ converge en tant que suite croissante et bornée, disons vers $f(x)$. Alors en passant à la limite l'équation de réccurence on a $f(x) = f(x) + \frac{1}{2}(x^2 - f^2(x))$
Donc $f(x) = \pm x$. Or $f(x) \geq 0$ (car les $P_n(x) \geq 0$) donc $f(x) = |x|$.
Alors le lemme de Dini appliqué aux $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne la cv. uniforme des $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la valeur absolue (qui est bien continue).

51.1

51.4 **Application** La racine carrée sur $[0,1]$ est la limite uniforme des fonctions polynomiales $\begin{cases} P_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \ P_{n+1} = x \mapsto P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - P_n^2(x)\right) \end{cases}$

Preuve Montrons d'abord par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\forall x \in [0,1]$ $0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$

↳ Pour $n = 0$ $\underset{\forall x \in [0,1]}{\wedge}$ $P_n(x) = 0$ $\quad P_{n+1}(x) = 0 + \frac{1}{2}(x) \leq \sqrt{x}\sqrt{x} \leq \sqrt{x}$ car $x \leq 1$ donc $\sqrt{x} \leq 1$

On a bien $\forall x \in [0,1]$ $0 \leq P_0(x) \leq P_1(x) \leq \sqrt{x}$.

↳ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose la propriété vraie au rang $n-1$. Soit $x \in [0,1]$.

- $$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \underbrace{\frac{1}{2}(x - \underbrace{\underbrace{P_n^2(x)}_{\leq \sqrt{x}^2}}_{\leq x})}_{\geq 0} \text{ par HR.}$$

donc $P_{n+1}(x) \geq P_n(x)$.

- $$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= \sqrt{x} - \sqrt{x} + P_n(x) + \frac{1}{2}\left(\sqrt{x}^2 - P_n(x)^2\right) \\ &= \sqrt{x} - \left(\sqrt{x} - P_n(x)\right) + \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} - P_n(x)\right)\left(\sqrt{x} + P_n(x)\right) \\ &= \sqrt{x} - \underbrace{\left(\sqrt{x} - P_n(x)\right)}_{\geq 0 \text{ par HR}} \underbrace{\left(1 - \underbrace{\frac{1}{2}\left(\underbrace{\sqrt{x}}_{\leq 1} + \underbrace{P_n(x)}_{\leq \sqrt{x} \leq 1}\right)}_{\leq 1}\right)}_{\geq 0} \\ &\leq \sqrt{x} \end{aligned}$$

On a bien $\forall x \in [0,1]$ $0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x} \leq 1$.

Donc pour tout $x \in [0,1]$, $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge disons vers $f(x)$ en tant que suite croissante majorée (par 1) et en passant la relation de réc. à la limite on a $f(x) = f(x) + \frac{1}{2}(x - f(x)^2)$ donc $f(x)^2 = x$ soit $f(x) = \pm\sqrt{x}$ or $f(x) \geq 0$ (car $\forall n$ $P_n(x) \geq 0$) donc $f(x) = \sqrt{x}$.

Ainsi les $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont une suite ↗ de f continue dont la limite simple est la f continue racine, d'après le lemme de Dini la fonction racine est alors limite uniforme des $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

51.5 Rq L'application 51.3 est utile dans la démonstration du th. de Stone-Weierstraß. en effet cela permet de montrer qu'une algèbre fermée de f continues sur un compact est réticulée.