Espace de Banach et convergence en norme des séries

52.1 **Rappel** Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.

52.2 Une série converge en norme ssi la série des normes du terme général (pas les normes des sommes partielles) converge

aut dit $\sum u_n$ cv en norme $\Leftrightarrow$ $\sum \|u_n\|$ cv ds $\mathbb{R}$

52.3 **Pté** Soit E un espace vectoriel normé (on note $\|\ \|_E$ sa norme)

E est un espace de Banach $\Leftrightarrow$ $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ $\sum \|e_n\|_E$ cv (dans $\mathbb{R}$) $\Rightarrow$ $\sum e_n$ cv (dans $E, \|\ \|$

c-à-d ssi toute série convergeant en norme c

Preuve $\Rightarrow$ Si E est un espace de Banach.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \|e_n\|$ converge dans $\mathbb{R}$.

$\left(\sum_{n=N}^{+\infty} \|e_n\|\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge alors vers 0 en tant que reste d'une série convergente.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. Il existe N_0 tq $\forall N \geq N_0$, $\sum_{n=N}^{+\infty} \|e_n\| < \varepsilon$

$\forall P \geq Q \geq N_0$

$$\left\|\sum_{n=0}^{P} e_n - \sum_{n=0}^{Q} e_n\right\| = \left\|\sum_{n=Q+1}^{P} e_n\right\| \leq \sum_{n=Q+1}^{P} \|e_n\| \leq \sum_{n=Q+1}^{+\infty} \|e_n\| \underset{\text{car } Q+1 \geq N_0}{<} \varepsilon$$

Donc la suite des sommes partielles $\left(\sum_{n=0}^{N} e_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de E, or E étant complet, cela implique qu'elle converge, d'où finalement $\sum e_n$ converge dans E.

$\Leftarrow$ Si la convergence en norme des série implique leur cv. dans E.

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy.

D'après 33.2 il suffit pour qu'elle converge qu'elle ait une valeur d'adhérence. On va donc ici extraire de $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente montrant ainsi l'existence d'une valeur d'adhérence (cf déf 50.5).

Puisque $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy $\forall k\in\mathbb{N}$ il existe $N\in\mathbb{N}$ tq $\forall p\geq q\geq N$ $\|e_p-e_q\|\leq \frac{1}{1+k^2}$

On peut donc poser, sans risques de prendre le min d'un ensemble vide,

$$\varphi(0)=\min\left\{n\in\mathbb{N} \mid \forall p\geq q\geq n\ \|e_p-e_q\|\leq \frac{1}{1+0^2}\right\}$$

et $\forall k\geq 1$ $\varphi(k)=\min\left\{\underbrace{n\geq\varphi(k-1)+1}_{(*)} \mid \forall p\geq q\geq n,\ \|e_p-e_q\|\leq\frac{1}{1+k^2}\right\}$.

φ est bien une extraction puisqu'elle est st. $\nearrow$ grâce à $(*)$

$\forall N\in\mathbb{N}$ on pose $S_N = e_{\varphi(N+1)} - e_{\varphi(0)}$.

Puisque $\forall N\in\mathbb{N}$ $S_N=\sum_{n=0}^{N} \left(e_{\varphi(n+1)}-e_{\varphi(n)}\right)$

et que $\sum_{n=0}^{N} \left\|e_{\underbrace{\varphi(n+1)}_{\geq\varphi(n)}} - e_{\underbrace{\varphi(n)}_{\geq\varphi(n)}}\right\| \leq \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{1+n^2}$ converge quand $N\to+\infty$

on a par hypothèse $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge dans E.

Soit $(e_{\varphi(N+1)}-e_{\varphi(0)})_{N\in\mathbb{N}}$ converge donc $(e_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

donc $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet bien une valeur d'adhérence et donc converge bien (car elle est de Cauchy).

D'où E est complet (m a RQ une suite de Cauchy convergeant néc.)