Transformée de Fourier d'une gaussienne

57.1 **lemme de dilatation** $\forall d \in \mathbb{N}^*, \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \forall \lambda \in \mathbb{R}^*$ $\widehat{f(\lambda \cdot)} = |\lambda|^{-d} \hat{f}\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right)$

Rappel On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ l'espace de Schwarz et $\hat{f}$ la transformée de Fourier de f.
Le lemme se réécrit $\widehat{x \mapsto f(\lambda x)} = \lambda^{-d} \hat{f}\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right)$
soit $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$ $\widehat{x \mapsto f(\lambda x)}(\xi) = \lambda^{-d} \hat{f}(\xi/\lambda)$.

Preuve Soit $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$\widehat{f(\lambda .)} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(x|\xi)} f(\lambda x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(\frac{u}{\lambda}|\xi)} f(u) \frac{du}{\lambda^d}$$ avec le chgmt de variable $u = \lambda x$, $du = |\lambda|^d dx$

$$= \frac{1}{|\lambda|^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{i}{\lambda}(u|\xi)} f(u)\, du$$

$$= \frac{1}{|\lambda|^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(u|\xi/\lambda)} f(u)\, du$$

bilinéarité du produit scalaire.

$$= \frac{1}{|\lambda|^d} \hat{f}(\xi/\lambda).$$

57.2 **Pté** $\forall d \in \mathbb{N}^*, \forall a \in \mathbb{R}^{+*}$ $\boxed{\widehat{e^{-a\|\cdot\|^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}^{\,d} e^{-\frac{\|\cdot\|^2}{4a}}}$

Ce qui se réécrit $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$ $\widehat{\begin{pmatrix} \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-a\|x\|^2} \end{pmatrix}}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}^{\,d} e^{-\frac{\|\xi\|^2}{4a}}$

Preuve Si $d = 1$.

- On pose $f = \begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-x^2} \end{pmatrix}$ et $g = \hat{f}$.
  $\forall \xi \in \mathbb{R}$ $g(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-x^2} dx$

On pose $F = \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,\xi) \mapsto e^{-ix\xi} e^{-x^2} \end{pmatrix}$. Ainsi $g = \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} F(x,\xi)\, dx$

- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \xi \in \mathbb{R}$ $|F(x,\xi)| \leq e^{-x^2}$ et $x \mapsto e^{-x^2} \in L^1$
- $\forall x \in \mathbb{R}$ $F_x = \xi \mapsto e^{-ix\xi} e^{-x^2}$ est dérivable et $F_x' = \xi \mapsto -ix\, e^{-ix\xi} e^{-x^2}$
  donc $\forall \xi \in \mathbb{R}$ $|F_x'(\xi)| \leq |x e^{-x^2}|$ or $x \mapsto x e^{-x^2} \in L^1$

Donc d'après le théorème de dérivation sous le signe $\int$

on a $g' = \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} d F'_x(\xi)\, dx$

$$= \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} d -ix\, e^{-ix\xi} e^{-x^2} dx$$

$\forall \xi \in \mathbb{R}$ $g'(\xi) = \frac{i}{2} \int_{\mathbb{R}} d \underbrace{-2x e^{-x^2}}_{u'} \underbrace{e^{-ix\xi}}_{v} dx$ par intégra° par partie

$$= \frac{i}{2} \left(\underbrace{\cancel{\left[e^{-x^2} e^{-ix\xi} \right]_{-\infty}^{+\infty}}}_{=0} - \int_{\mathbb{R}} d e^{-x^2} e^{-ix\xi} \times (-i\xi)\, dx \right)$$

$$= \frac{i^2 \xi}{2} \int_{\mathbb{R}} d e^{-x^2} e^{-ix\xi} dx$$

$$= \frac{-\xi}{2} g(\xi).$$

Supposons que g ne s'annule pas.

On a alors $\forall \xi \in \mathbb{R}$ $\frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = -\frac{\xi}{2}$ soit $(\ln(g))'(\xi) = \frac{-\xi}{2}$

alors en intégrant, il existe $c \in \mathbb{R}$ tq $\forall \xi \in \mathbb{R}$ $\ln(g(\xi)) = -\xi^2/4 + c$

donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tq $\forall \xi \in \mathbb{R}$ $g(\xi) = e^{-\xi^2/4} \times k$

Donc on a en particulier $g(0) = e^0 \times k = k$

or d'après 56.1 $g(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

d'où $\underline{g = \xi \mapsto \sqrt{\pi}\, e^{-\xi^2/4}}$ (1)

• Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$.

On pose $f_a = \begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-a x^2} \end{pmatrix} = f(\sqrt{a}\,\cdot)$

et $g_a = \hat{f_a}$.

D'après le lemme $g_a = \hat{f_a} = \widehat{f(\sqrt{a}\,\cdot)} = \frac{1}{\sqrt{a}} \hat{f}\left(\frac{\cdot}{\sqrt{a}}\right) = \frac{1}{\sqrt{a}} g\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$

Or d'après (1) $g = \xi \mapsto \sqrt{\pi}\, e^{-\xi^2/4}$

Donc $g_a = \xi \mapsto \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} e^{-\left((\xi/\sqrt{a})^2/4\right)} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\xi^2/4a}$

Donc la propriété est vraie au rang $d=1$.

- Soit $d \in \mathbb{N}^*$.
  On suppose la propriété vraie au rang d. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$
  On note $f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-a\|x\|^2} \end{pmatrix}$ et $g = \hat{f}$.

  $\tilde{f} : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^{d} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-a\|x\|^2} \end{pmatrix}$ et $\tilde{g} = \widehat{\tilde{f}}$

$\forall \xi \in \mathbb{R}^{d+1}$ $g(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(x|\xi)} f(x)\,dx$

$= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}} e^{-i\sum_{k=1}^{d+1} x_k \xi_k} e^{-a\sum_{k=1}^{d+1} x_k^2} dx_1 \dots dx_d \times dx_{d+1}$

Fubini

$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\sum_{k=1}^{d} x_k \xi_k} e^{-a\sum_{k=1}^{d} x_k^2} dx_1 \text{——} dx_d \right) e^{-i x_{d+1}\xi_{d+1}} e^{-a x_{d+1}^2} dx_{d+1}$

en notant $\tilde{\xi} = (\xi_1, \dots \xi_d)$ et avec les chgmt de variables $\tilde{x} = (x_1, \dots x_d)$, $u = x_{d+1}$

$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(\tilde{x}|\tilde{\xi})} e^{-a\|\tilde{x}\|^2} d\tilde{x} \right) e^{-iu\xi_{d+1}} e^{-au^2} du$

$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(\tilde{x}|\tilde{\xi})} \tilde{f}(\tilde{x})\,d\tilde{x} \right) e^{-iu\xi_{d+1}} e^{-au^2} du$

$= \int_{\mathbb{R}} \tilde{g}(\tilde{\xi})\, e^{-iu\xi_{d+1}} e^{-au^2} du$

$= \sqrt{\frac{\pi}{a}}^{\,d} e^{-\|\tilde{\xi}\|^2/4a} \times \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-iu\xi_{d+1}} e^{-au^2} du}_{= \widehat{f_1}(\xi_{d+1}) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\xi_{d+1}^2/4a}}$) hypothèse de récurrence

) par prté au rang 1

Donc $\forall \xi \in \mathbb{R}^{d+1}$ $g(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}^{d+1} e^{-\frac{1}{4a}\underbrace{(\|\tilde{\xi}\|^2 + \xi_{d+1}^2)}_{\substack{\sum_{k=1}^{d} \xi_k^2 + \xi_{d+1}^2 \\ \| \\ \|\xi\|^2}}}$

$= \sqrt{\frac{\pi}{a}}^{d+1} e^{-\|\xi\|^2/4a}$

D'où la propriété au rang $d+1$.
On conclut par récurrence.