6.

# Théorème de Cesàro

$$\boxed{u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \ell \Rightarrow \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell}$$

Pour $n\in\mathbb{N}$ on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On veut donc MQ $\left(\frac{S_n}{n+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

Soit $n\in\mathbb{N}$

$$\left\|\frac{S_n}{n+1} - \ell\right\| = \left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k - \frac{1}{n+1}(n+1)\ell\right\| = \frac{1}{n+1}\left\|\sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n}\ell\right\|$$

$$= \left\|\sum_{k=0}^{n} u_k - \ell\right\|\frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=0}^{n}\|u_k-\ell\| \times \frac{1}{n+1}$$

Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}^{+*}$.

Puisque $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \ell$, il existe $K\in\mathbb{N}$ tel que $k\geq K \Rightarrow \|u_k-\ell\| \leq \varepsilon/2$

Soit $n\geq K$

$$(n+1)\left\|\frac{S_n}{n+1} - \ell\right\| \leq \sum_{k=0}^{n}\|u_k-\ell\| = \sum_{k=0}^{K}\|u_k-\ell\| + \sum_{k=K+1}^{n}\|u_k-\ell\| \leq \sum_{k=0}^{K}\|u_k-\ell\| + (n-K)\,\varepsilon/2$$

donc $\left\|\frac{S_n}{n+1} - \ell\right\| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{K}\|u_k-\ell\| + \frac{n-K}{n+1}\,\varepsilon/2 \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{K}\|u_k-\ell\| + \varepsilon/2$

Or $A_K = \sum_{k=0}^{K}\|u_k-\ell\|$ est une constante pour $n$ donc $\left(\frac{A_K}{n+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc il existe $N\geq K$ tel que $\forall n\geq N \left(\frac{A_K}{n+1}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Soit $n\geq N$ $\left\|\frac{S_n}{n+1} - \ell\right\| \leq \left(\frac{A_k}{n+1}\right) + \varepsilon/2 \leq \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon/2 = \varepsilon$

Donc $\left\|\frac{S_n}{n+1} - \ell\right\| \to 0$ soit $\frac{S_n}{n+1} \to \ell$.

⚠ La réciproque est fausse

On considère $u_k = (-1)^k$.

$$\left|\frac{S_n}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\right| = \frac{1}{n+1} \quad \text{si } n \text{ est paire}$$

$$= 0 \quad \text{sinon}$$

Donc $\frac{S_n}{n+1} \to 0$

Pourtant $(-1)^k$ ne converge pas quand $k\to+\infty$.