Transformée de Fourier et convolution

$d \in \mathbb{N}^*$

60.1 **Pté** $\forall (f,g) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)^2$ $\quad \boxed{\widehat{f * g} = \hat{f} \times \hat{g}}$

Rq : on rappelle qu'on note ^ la transformée de Fourier.

Preuve Soit $(f,g) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)^2$

On pose, $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$, $F_\xi = \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,y) & \longmapsto & e^{-i(x|\xi)} f(x-y) g(y) \end{array} \right)$

Notons que $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$, $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^d)^2$ $F_\xi(x,y) = e^{-i(x-y|\xi)} f(x-y) \; e^{-i(y|\xi)} g(y)$

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d \quad \widehat{f*g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(\xi|x)} (f*g)(x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(x|\xi)} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y)\, dy \right) dx$$

Fubini

$$= \int_{(\mathbb{R}^d)^2} F_\xi(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(x-y|\xi)} f(x-y)\, dx \right) e^{-i(y|\xi)} g(y)\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(u|\xi)} f(u)\, du \right) e^{-i(y|\xi)} g(y)\, dy$$

$$= \hat{f}(\xi) \times \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(y|\xi)} g(y)\, dy$$

$$= \hat{f}(\xi) \times \hat{g}(\xi).$$

d'où la propriété.

60.2 **Pté** $\forall (f,g) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)^2$ $\quad \widehat{f \times g} = (2\pi)^{-d} \hat{f} * \hat{g}$

Preuve $\widehat{\hat{f} * \hat{g}} \underset{60.1}{=} \hat{\hat{f}} \times \hat{\hat{g}} \underset{59.3}{=} 2\pi^d \check{f} \times 2\pi^d \check{g}$ On note $h = \hat{f} * \hat{g}$

$(2\pi)^{-d} \hat{h} = (2\pi)^d \check{f}\check{g}$ donc $(2\pi)^{-d} \check{\hat{h}} = (2\pi)^d \check{\check{f}}\check{\check{g}} = (2\pi)^d f \times g$

donc $(2\pi)^{-d} \hat{\check{\hat{h}}} = (2\pi)^d \widehat{f \times g}$ or $(2\pi)^{-d} \hat{\check{\hat{h}}} \overset{59.3}{=} h$ d'où $\widehat{f \times g} \times (2\pi)^{-d} = h = \hat{f} * \hat{g}$.

⚠ 60.1 est utile pour démontrer 59.3 lui m̂ utile pour 60.2.
L'ordre logique des démonstrations est celui là : 60.1 / 59.3 / 60.2 .