Connexité en topologie générale

67.1 **Déf** Soit (X,Θ) un espace topologique
X est <u>connexe</u> $\Leftrightarrow \forall (U,V)\in\Theta^2,\ X = U \sqcup V \Rightarrow U=\emptyset$ ou $V=\emptyset$

67.2 **Pté** Soit (X,Θ) un espace topologique. On considère $\{0,1\}$ muni de la topo discrète.
X est connexe $\Leftrightarrow \forall f\in C^0(X,\{0,1\})$, f est constante

<u>Preuve</u> * Supposons X connexe. Soit f continue de X dans $\{0,1\}$.
On pose $U = f^{-1}(\{0\})$ et $V = f^{-1}(\{1\})$.
$\{0,1\}$ étant muni de la topologie discrète, $\{0\}$ et $\{1\}$ en sont des ouverts, ainsi U et V sont des ouverts de X en tant qu'images réciproques d'ouverts par l'application continue f.
Puisqu'un élément n'a qu'une image, $U\cap V=\emptyset$.
D'autre part f étant à valeurs dans $\{0,1\}$ on a $X \subset f^{-1}(\{0\})\cup f^{-1}(\{1\}) = U\cup V$
D'où $X = U \sqcup V$. Par connexité de C on a $U=\emptyset$ ou $V=\emptyset$.
Dans un cas f est égale à 1, dans l'autre f est égale à 0.

* Réciproquement supposons que $\forall f\in C^0(X,\{0,1\})$ f est constante,
Soit $(U,V)\in\Theta^2$ tels que $X = U\sqcup V$. On considère alors
$f = \begin{pmatrix} X \longrightarrow \{0,1\} \\ x \mapsto \mathbb{1}_{x\in U}\end{pmatrix}$ vaut 0 sur V, 1 sur U. RQ f est continue.
Soit W un ouvert de $\{0,1\}$.
↳ Si $W=\emptyset$, alors $f^{-1}(W)=\emptyset$ ouvert de X
↳ Si $W=\{0,1\}$ ——— $= X$ ———
↳ Si $W=\{0\}$ ——— $= V$ ———
↳ Si $W=\{1\}$ ——— $= U$ ———

on en déduit que f est continue.

Par hypothèse f est donc cst : soit $f\equiv 1$ alors $V=\emptyset$ car $U=X$
soit $f\equiv 0$ alors $U=\emptyset$
D'où X est connexe.

67.3 **Déf** Soit (X, Θ) un espace topologique. Soit $P \in \mathcal{P}(X)$.
P est une partie connexe $\Leftrightarrow$ P muni de la topologie induite l'est

Cf. 68.3 **Pté** L'image continue d'une partie connexe est connexe.

Preuve : Cf 68.3.

67.4 **Pté** L'union de deux parties connexes non disjointes est connexe.

Preuve : Soit (A, B) un couple de parties connexe de l'espace topologique X.
On les suppose non disjointes, il existe alors $x \in A \cap B$.
On considère f continue de $A \cup B$ dans $\{0, 1\}$.
Par connexité de A, $f_{/A}$ est égale à $f(x)$ puisque $x \in A$
——— B, $f_{/B}$ est ——— B.
Donc f est sur $A \cup B$. D'où $A \cup B$ connexe.