

*et images*  
Préimages continues en topologie générale.

68.0 Déf Soient  $(X, \theta)$  et  $(Y, \theta')$  deux espaces topologiques.  
Soit  $f \in \mathcal{F}(X, Y)$ .  
 $f$  est continue de  $X$  de  $Y$   $\Leftrightarrow \forall x \in X, \forall U \in \theta', f(x) \in U \Rightarrow \exists V \in \theta, x \in V \text{ et } f(V) \subset U$

Notation Si  $f \in \mathcal{F}(X, Y)$ . Si  $B \in \mathcal{P}(Y)$ .  
On appelle pré-image de  $B$ , l'image réciproque de  $B$  (par  $f$ )  
c-à-d  $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ .

Pte' Soient  $(X, \theta)$  et  $(Y, \theta')$  deux espaces topologiques.  
Soit  $f$  continue de  $X$  dans  $Y$ . Soit  $B \in \mathcal{P}(Y)$ . Soit  $A \in \mathcal{P}(X)$ .

- 68.1 •  $B$  est ouvert  $\Rightarrow f^{-1}(B)$  est ouvert
- 68.2 •  $B$  est fermé  $\Rightarrow f^{-1}(B)$  est fermé
- 68.3 •  $A$  est connexe  $\Rightarrow f(A)$  est connexe

Preuve (a) Supposons  $B$  ouvert. On pose  $A = f^{-1}(B)$ .  
Soit  $x \in A$ .  $f(x) \in B$ . Donc  $B$  est un ouvert de  $Y$  contenant  $f(x)$ ,  
par continuité de  $f$  il existe  $U$  un ouvert de  $X$  tel que  
 $x \in U$  et  $f(U) \subset B$ , or  $f(U) \subset B \Leftrightarrow U \subset f^{-1}(B) = A$ , donc  
 $x \in U \subset A$  soit  $x \in \overset{\circ}{A}$ . Donc  $A \subset \overset{\circ}{A}$  or  $\overset{\circ}{A} \subset A$  donc  $A = \overset{\circ}{A}$ .  
Autrement dit  $A$  ouvert d'après

(b) Supposons  $B$  fermé.  $f^{-1}(B)^c = f^{-1}(B^c)$  est ouvert  
d'après (a) et en tant qu'image réciproque de l'ouvert  
 $B^c$  par  $f$  continue. Donc  $f^{-1}(B)$  fermé.

(c). Supposons  $A$  connexe et posons  $B = f(A)$ .

On considère  $\varphi$  une fonction continue de  $B$  dans  $\{0,1\}$ .

$\varphi \circ f$  est alors une fonction continue de  $A$  dans  $\{0,1\}$ .

Par connexité de  $A$ ,  $\varphi \circ f$  est alors constante, disons égale à  $c$ .

Ainsi  $\forall a \in A \varphi(f(a)) = c$  donc  $\forall b \in B \varphi(b) = c$ . Donc

$\varphi$  est constante. D'où la connexité de  $B$  d'après la caractérisation 67.2.

$(\forall x \in X) \exists y \in Y (x, y) \in R$  (1)

Propriété de surjectivité de  $f$  d'après la définition de  $f$ .

$(\exists y \in Y) \forall x \in X (x, y) \in R$  (2)

Propriété de transitivité de  $R$  d'après la définition de  $R$ .

Soit  $f$  une fonction de  $X$  dans  $Y$  et  $R$  une relation de  $X \times Y$ .

On a  $f \in R \iff f \in R$  (1)

On a  $f \in R \iff f \in R$  (2)

On a  $f \in R \iff f \in R$  (3)

$(R)^{-1} \circ f = A$  pour  $A$  une partie de  $X$ .

On a  $f \in R \iff f \in R$  d'après la définition de  $R$ .

On a  $f \in R \iff f \in R$  d'après la définition de  $R$ .

On a  $f \in R \iff f \in R$  d'après la définition de  $R$ .

On a  $f \in R \iff f \in R$  d'après la définition de  $R$ .

On a  $f \in R \iff f \in R$  d'après la définition de  $R$ .

On a  $f \in R \iff f \in R$  d'après la définition de  $R$ .

On a  $f \in R \iff f \in R$  d'après la définition de  $R$ .

On a  $f \in R \iff f \in R$  d'après la définition de  $R$ .

On a  $f \in R \iff f \in R$  d'après la définition de  $R$ .