Préimages continues et images en topologie générale.

68.0 **Déf** Soient (X,Θ) et (Y,Θ') deux espaces topologiques.
Soit $f \in \mathcal{F}(X,Y)$.
f est continue de X ds Y $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X, \forall U \in \Theta' f(x) \in U \Rightarrow \exists V \in \Theta, x \in V \text{ et } f(V) \subset U$

Notation Si $f \in \mathcal{F}(X,Y)$. Si $B \in \mathcal{P}(Y)$.
On appelle pré-image de B, l'image réciproque de B (par f)
c-à-d $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$.

Pté Soient (X,Θ) et (Y,Θ') deux espaces topologiques.
Soit f continue de X dans Y. Soit $B \in \mathcal{P}(Y)$. Soit $A \in \mathcal{P}(X)$.

68.1 • B est ouvert $\Rightarrow$ $f^{-1}(B)$ est ouvert

68.2 • B est fermé $\Rightarrow$ $f^{-1}(B)$ est fermé

68.3 • A est connexe $\Rightarrow$ $f(A)$ est connexe

Preuve (a) Supposons B ouvert. On pose $A = f^{-1}(B)$.
Soit $x \in A$. $f(x) \in B$. Donc B est un ouvert de Y contenant x, par continuité de f il existe U un ouvert de X tel que $x \in U$ et $f(U) \subset B$, or $f(U) \subset B \Leftrightarrow U \subset f^{-1}(B) = A$, donc $x \in U \subset A$ soit $x \in \mathring{A}$. Donc $A \subset \mathring{A}$ or $\mathring{A} \subset A$ donc $A = \mathring{A}$.
Autrement dit A ouvert d'après

(b) Supposons B fermé. $f^{-1}(B)^c = f^{-1}(B^c)$ est ouvert d'après (a) et en tant qu'image réciproque de l'ouvert B^c par f continue. Donc $f^{-1}(B)$ fermé.

(c) Supposons A connexe et posons $B = f(A)$.

On considère φ une fonction continue de B dans $\{0,1\}$.
$\varphi \circ f$ est alors une fonction continue de A dans $\{0,1\}$.
Par connexité de A, $\varphi \circ f$ est alors constante, disons égale à c.
Ainsi $\forall a \in A$ $\varphi(f(a)) = c$ donc $\forall b \in B$ $\varphi(b) = c$. Donc φ est constante. D'où la connexité de B d'après la caractérisation 67.2 .