7

Démonstration

> Toute fonction continue sur un segment est limite uniforme de fonctions affines par morceaux et continues.

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$.
Soit $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$.
Soit $\mathcal{E} \in \mathbb{R}^{+*}$.
On va construire $g \in C^0([a,b],\mathbb{R})$ affine par morceaux, telle que $\|g-f\|_\infty \leq \mathcal{E}$.

- f est continue sur $[a,b]$ qui est un compact, donc d'après le théorème de Heine f est uniformément continue sur $[a,b]$.
  Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\forall (x,y) \in [a,b]$ $|x-y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \frac{\mathcal{E}}{2}$

- $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{N} \leq \alpha$ On va donc découper $[a,b]$ en N intervalles de taille $1/N \leq \alpha$. On introduit $k = \begin{pmatrix} [a,b] \to [0..N-1] \\ x \mapsto \left\lfloor \frac{x-a}{N} \right\rfloor \end{pmatrix}$ ainsi $\forall x \in [a,b]$ $x \in \left[\frac{k(x)}{N}, \frac{k(x)+1}{N}\right]$

  On définit g affine sur chacuns des N intervalles $\left(\left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right]\right)_{k \in [0..N-1]}$ et égale en chacuns des $N+1$ points $\left(\frac{k}{N}\right)_{k\in[0..N]}$ à f.

$$g = \begin{pmatrix} [a,b] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f\left(\frac{k(x)}{N}\right) + (x-k(x))\, N\left(f\left(\frac{k(x)+1}{N}\right) - f\left(\frac{k(x)}{N}\right)\right) \end{pmatrix}$$

Soit $x \in [a,b]$. $\left|x - \frac{k(x)}{N}\right| \leq 1/N \leq \alpha$ (et $\left|x - \frac{k(x)+1}{N}\right| \leq 1/N \leq \alpha$)
donc $\left|f(x) - f\left(\frac{k(x)}{N}\right)\right| \leq \mathcal{E}/2$ (et $\left|f(x) - f\left(\frac{k(x)+1}{N}\right)\right| \leq \mathcal{E}/2$) inutile

$$\left|\frac{k(x)}{N} - \frac{k(x)+1}{N}\right| \leq \frac{1}{N} \leq \alpha \text{ donc } \left|f\left(\frac{k(x)}{N}\right) - f\left(\frac{k(x)+1}{N}\right)\right| \leq \mathcal{E}/2$$

et puisque $g(x)$ est compris entre $g(k(x)/N)$ et $g\left(\frac{k(x)+1}{N}\right)$ c'est à dire entre $f\left(\frac{k(x)}{N}\right)$ et $f\left(\frac{k(x)+1}{N}\right)$ on a $\left|f\left(\frac{k(x)}{N}\right)-g(x)\right| \leq \varepsilon/2$

Donc $|f(x)-g(x)| = \left|f(x)-f\left(\frac{k(x)}{N}\right)+f\left(\frac{k(x)}{N}\right)-g(x)\right|$

$$\leq \left|f(x)-f\left(\frac{k(x)}{N}\right)\right| + \left|f\left(\frac{k(x)}{N}\right)-g(x)\right|$$

$$\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

D'où $\|f-g\|_{[a,b]} \leq \varepsilon$.