

## Propriétés de la trace.

Soit  $K$  un corps commutatif. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On note  $M_n(K)$  l'ens. des matrices carrées de taille  $n \times n$  à coeff dans  $K$   
•  $GL_n(K)$  l'ensemble des matrices inversibles de  $M_n(K)$ .

70.1 Def L'application trace est  $Tr: M_n(K) \longrightarrow K$   
 $(A_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \longmapsto \sum_{i=1}^n A_{ii}$

70.2 Pte La trace est un morphisme d'espaces vectoriels entre  $(M_n(K), +, \cdot)$  et  $(K, +, \cdot)$ .

En particulier  $\left\{ \begin{array}{l} \forall \lambda \in K, \forall (A, B) \in M_n(K)^2 \quad \underline{Tr(\lambda A + B) = \lambda Tr(A) + Tr(B)} \\ \underline{Tr(O) = 0} \end{array} \right.$  Rq.  $Tr(I_n) = n$ .

Preuve -  $Tr(\lambda A + B) = \sum_{i=1}^n (\lambda A + B)_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda A_{ii} + B_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^n A_{ii} + \sum_{i=1}^n B_{ii}$   
 $= \lambda Tr(A) + Tr(B)$ .

$$\bullet Tr(O) = \sum_{i=1}^n 0_{ii} = \sum_{i=1}^n 0 = 0$$

$$\bullet Tr(I_n) = \sum_{i=1}^n \delta_{ii} = \sum_{i=1}^n 1 = n$$

Rq. Ce ne peut être un iso car  $Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$  mais  $\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix} \neq O$ .

70.3 Pte Soit  $(A, B) \in M_n(K)^2$   $Tr(AB) = Tr(BA)$

Preuve  $Tr(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{ki} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n B_{ki} A_{ik}$   
 $= \sum_{k=1}^n (BA)_{kk} = Tr(BA)$ .

10.4 Pte'  $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \text{Tr}(A) = \text{Tr}({}^t A)$  (a)  
 $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad \text{Tr}(\bar{A}) = \overline{\text{Tr}(A)}$  de  $\text{Tr}(A^*) = \overline{\text{Tr}(A)}$  (b)

Preuve •  $\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (A)_{ii} = ({}^t A)_{ii}$  donc  $\sum_{i=1}^n A_{ii} = \sum_{i=1}^n ({}^t A)_{ii}$   
 •  $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n \bar{A}_{ii} = \overline{\sum_{i=1}^n A_{ii}} = \overline{\text{Tr}(A)}$

$\left( \begin{matrix} \mathbb{K} \\ \mathbb{A} \end{matrix} \right) \xrightarrow{\text{Tr}} \mathbb{K}$  to each multiplicity 1 of  $\chi_A$

autre description de  $\text{Tr}(A)$  :  $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$  (with  $\lambda_i$  eigenvalues)

$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n \text{Tr}(P^{-1}AP) = \text{Tr}(P^{-1}AP) = \text{Tr}(A)$

Preuve  $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n \text{Tr}(P^{-1}AP) = \text{Tr}(P^{-1}AP) = \text{Tr}(A)$   
 $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n \text{Tr}(P^{-1}AP) = \text{Tr}(P^{-1}AP) = \text{Tr}(A)$

Pte'  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$  (c)

$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} B_{ji} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n B_{ji} A_{ij} = \sum_{j=1}^n (BA)_{jj} = \text{Tr}(BA)$