Caractérisation d'une algèbre de Lie résoluble

Déf Soit g une algèbre de Lie.

78.1 • La suite dérivée de g est définie par $\begin{cases} D^1(g) = g \\ \forall n \geqslant 1 \; D^{n+1}(g) = [D^n(g), D^n(g)] \end{cases}$

78.2 • g est résoluble $\Leftrightarrow$ il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $D^n(g) = \{0\}$

78.3 **Pté** La suite dérivée de g est la suite minimale (au sens de l'inclusion terme à terme) de sous-algèbres de Lie de g $(h_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, telles que $\begin{cases} h_1 = g \\ \forall i \in \mathbb{N}^* \; h_{i+1} \trianglelefteq h_i \text{ et } h_i/h_{i+1} \text{ abélien} \end{cases}$

Preuve Soit $(h_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de sous-algèbres de Lie de g telle que $h_1 = g$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$ $h_{i+1} \trianglelefteq h_i$ et h_i/h_{i+1} abélien.

. On veut MQ $\forall i \in \mathbb{N}^*$ $D^i(g) \subset h_i$

- $D^1(g) = g = h_1$ donc on a bien $D^1(g) \subset h_1$
- Si $D^i(g) \subset h_i$ alors $D^{i+1}(g) = [D^i(g), D^i(g)] \subset [h_i, h_i]$

or $\forall (X,Y) \in h_i^2$, $[\bar{X}, \bar{Y}] = \bar{0}$ car h_i/h_{i+1} abélien, or $[\bar{X}, \bar{Y}] = \overline{[X,Y]}$,

donc $\overline{[X,Y]} = \bar{0}$ soit $[X,Y] \in h_{i+1}$ donc $[h_i, h_i] \subset h_{i+1}$.

D'où $D^{i+1}(g) \subset h_{i+1}$.

Par récurrence, $\forall i \in \mathbb{N}^*$ $D^i(g) \subset h_i$.

• Il faut aussi MQ $D^i(g)$ vérifie les pté énnoncées.

- $D^1(g) = g$ ok.
- Soit $(x,y) \in D^i(g) \times D^{i+1}(g)$ pour $i \in \mathbb{N}^*$ $D^{i+1}(g) \subset D^i(g)$ donc $y \in D^i(g)$.

Donc $[x,y] \subset [D^i(g), D^i(g)] = D^{i+1}(g)$. D'où $[D^i(g), D^{i+1}(g)] \subset D^{i+1}(g)$

soit $D^{i+1}(g) \trianglelefteq D^i(g)$

- $D^{i+1}(g)/D^i(g)$ abélien $\Leftrightarrow$ $[D^{i+1}(g), D^{i+1}(g)] \subset D^i(g)$.

or puisque $D^{i+1}(g) \subset D^i(g)$ on a $[D^{i+1}(g), D^{i+1}(g)] \subset [D^i(g), D^i(g)] \subset D^i(g)$

car $D^i(g)$ est une s.a. de Lie.

D'où le résultat annoncé.

79.4 **Cor** $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie <u>résoluble</u>

$\iff$ il existe $(\mathfrak{h}_i)_{i\in[1,n]}$ suite d'idéaux <u>imbriqués</u> ⚠ à quotients abéliens telle que $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}_n = \{0\}$.

* En effet si $\mathfrak{g}$ est résoluble alors $(D^i(\mathfrak{g}))_{i\in\mathbb{N}^*}$ tronquée dès que $D^i(\mathfrak{g}) = \{0\}$ convient d'après la pté préc.
* Réciproquement si une telle suite existe, on peut la prolonger par $\{0\}$ puis appliquer la pté préc : $D^n(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{h}_n = \{0\}$. Donc $\mathfrak{g}$ résoluble.

78.5 **Pté** Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Soit $\mathfrak{h}$ un idéal de $\mathfrak{g}$.
$\mathfrak{g}$ résoluble $\iff$ $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ résolubles.

<u>Preuve</u> : On montre par récurrence que $D^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) = D^n(\mathfrak{g})/\mathfrak{h}$ pour $\forall n\in\mathbb{N}^*$

→ $D^1(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}/\mathfrak{h} = D^1(\mathfrak{g})/\mathfrak{h}$. ok.

→ Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On suppose la pté vraie au rg n :

$D^{n+1}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) = [\![D^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}), D^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})]\!] \underset{HR}{=} [\![D^n(\mathfrak{g})/\mathfrak{h}, D^n(\mathfrak{g})/\mathfrak{h}]\!]$.

· Soit $(x,y)\in D^n(\mathfrak{g})^2$. $[\![\bar{x},\bar{y}]\!] = \overline{[x,y]}$ or $[x,y]\in[D^n(\mathfrak{g}),D^n(\mathfrak{g})] = D^{n+1}(\mathfrak{g})$. donc $[\![\bar{x},\bar{y}]\!]\in D^{n+1}(\mathfrak{g})/\mathfrak{h}$.

D'où $[\![D^n(\mathfrak{g})/\mathfrak{h}, D^n(\mathfrak{g})/\mathfrak{h}]\!] \subset D^{n+1}(\mathfrak{g})/\mathfrak{h}$.

· Soit $\bar{z}\in D^{n+1}(\mathfrak{g})/\mathfrak{h}$ $z\in D^{n+1}(\mathfrak{g}) = [D^n(\mathfrak{g}), D^n(\mathfrak{g})]$ donc s'écrit $z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [x_i, y_i]$ pour $(x_i,y_i)_{i\in[1,n]}\in(D^n(\mathfrak{g}))^{2n}$

alors $\bar{z} = \overline{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i [x_i,y_i]} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{[x_i,y_i]} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [\![\underbrace{\bar{x}_i}_{D^n(\mathfrak{g})/\mathfrak{h}}, \underbrace{\bar{y}_i}_{\in D^n(\mathfrak{g})/\mathfrak{h}}]\!] \in [\![D^n(\mathfrak{g})/\mathfrak{h}, D^n(\mathfrak{g})/\mathfrak{h}]\!]$

D'où l'inclusion réciproque, et donc l'hérédité.

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $D^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) = D^n(\mathfrak{g})/\mathfrak{h}$.

· Si $\mathfrak{g}$ résoluble, il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tq $D^n(\mathfrak{g}) = \{0\}$ alors $D^n(\mathfrak{g})/\mathfrak{h} = \{\bar{0}\}$ soit $D^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) = \{0\}$ donc $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ rés.
De plus $\forall k\in\mathbb{N}^*$ $D^k(\mathfrak{h})\subset D^k(\mathfrak{g})$ donc en part $D^n(\mathfrak{h})\subset D^n(\mathfrak{g}) = \{0\}$ soit $D^n(\mathfrak{h}) = \{0\}$ donc $\mathfrak{h}$ rés.

· Si $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}$ sont rés il existe $(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2$ tels que $D^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) = \{\bar{0}\}$ et $D^m(\mathfrak{h}) = \{0\}$.
$D^n(\mathfrak{g})/\mathfrak{h} = D^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) = \{\bar{0}\}$ donc $D^n(\mathfrak{g})\subset\mathfrak{h}$ donc $D^{n+m}(\mathfrak{g})\subset D^m(\mathfrak{h}) = \{0\}$. Donc $\mathfrak{g}$ résoluble.