Sous-groupes fermés de $(\mathbb{R},+)$

80.1 **Pté** Les sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$ sont denses dans $\mathbb{R}$ ou du type $a\mathbb{Z}$ $a\in\mathbb{R}$

Preuve Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$.
Si $G=\{0\}$ alors $G=0\mathbb{Z}$.
Sinon il existe $x\in G\setminus\{0\}$. alors x ou $-x$ appartient à $G\cap\mathbb{R}^{+*}$.
On pose $A=G\cap\mathbb{R}^{+*}$. A est non vide.
↳ Si A admet un plus petit élément a. $a\in\mathbb{R}^{+*}$. MQ $G=a\mathbb{Z}$.

- $a\times 0=0\in G$
- Si $a\times n\in G$ alors $a\times(n+1)=\underbrace{an}_{\in G}+\underbrace{a}_{\in G}\in G$
  Par récurrence on en déduit $\mathbb{N}a\subset G$.
  Par passage à l'opposé on a $\mathbb{Z}a\subset G$

donc $\underline{a\mathbb{Z}\subset G}$

- Soit $y\in\mathbb{R}\setminus a\mathbb{Z}$. Il existe $k\in\mathbb{Z}$ tq $y\in\,]ak,a(k+1)[$.
  Si $y\in G$, alors $y-ak\in G$ car $ak\in\mathbb{Z}\subset G$. et $y-ak\in\mathbb{R}^{+*}$
  Or $y-ak<a(k+1)-ak=a$ IMP car $a=\min A=\min(G\cap\mathbb{R}^{+*})$
  D'où $a\mathbb{Z}^c\subset G^c$

donc $\underline{G\subset a\mathbb{Z}}$

On a ici un groupe du type $a\mathbb{Z}$ avec $a\in\mathbb{R}$.

↳ Si A n'admet pas de plus petit élément. MQ G dense dans $\mathbb{R}$.
Soit $r\in\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}^{+*}$
A n'ayant pas de plus petit élém^t (et $\mathbb{R}$ étant, on le sait, totalem^t ordonné)
il existe nec $\alpha\in A$ tq $\alpha<\varepsilon$.
Il existe alors $k\in\mathbb{Z}$ tel que $r\in[k\alpha,(k+1)\alpha]$.
$|r-k\alpha|=r-k\alpha\leq(k+1)\alpha-k\alpha=\alpha<\varepsilon$
et $k\alpha\in\alpha\mathbb{Z}\subset G$ (comme $a\mathbb{Z}\subset G$).
D'où G dense dans $\mathbb{R}$.

80.2 **Cor** Les sous-groupes fermés de $(\mathbb{R},+)$ sont $\mathbb{R}$ ou du type $a\mathbb{Z}$ pr $a\in\mathbb{R}$.

Soit G est du type $a\mathbb{Z}$ soit G dense ds $\mathbb{R}$ donc $\overline{G}=\mathbb{R}$ or $\underset{\uparrow \text{ car } G \text{ fermé}}{G=\overline{G}}$ d'où $G=\mathbb{R}$.