# Critères de Cartan

84.1 **Pté** Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{C}$.

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{g} \leq \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \\ \forall (X,Y) \in \mathfrak{g}^2 \quad tr(XY) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathfrak{g} \text{ résoluble}$$

**Preuve** D'après 82.3 on sait que $\mathfrak{g}$ est résoluble ssi $D(\mathfrak{g})$ est nilpotente.
On aimerait donc utiliser le théorème d' pour $D(\mathfrak{g})$.

Soit $M = [A,B]$ où $(A,B) \in \mathfrak{g}^2$.

D'après le théorème de Jordan additif sur $\mathbb{C}$ on peut décomposer $M = S + N$
où $S$ est semi-simple et dans $\mathbb{C}[M]$
$N$ est nilpotente et dans $\mathbb{C}[M]$ donc néc $NS = SN$.

- Montrons que $S$ est nulle.

$S$ étant semi-simple elle est $\mathbb{C}$-diagonalisable : il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $S = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_i | i \in [1..n])$.

Notons $\bar{S}$ la conjuguée complexe de $S$. $\bar{S} = P\bar{D}P^{-1}$

$$tr(\bar{S}M) = tr(\bar{S}S + \bar{S}N) = tr(\bar{S}S) + Tr(\bar{S}N)$$
$$= tr(\bar{D}D) + \underbrace{tr(\bar{D}N)}_{0} \quad \text{car la trace est un invariant de conj. (cf 69.5)}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda_i}\lambda_i \qquad \text{0 car } N \text{ nilp et } \bar{D}N \text{ aussi nilp par csq}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2.$$

- Montrons donc que $tr(\bar{S}M)$ est nulle

$$tr(\bar{S}X) = tr(\bar{S}[A,B]) = tr(\bar{S}AB - \bar{S}BA) = tr(\bar{S}AB) - tr(\bar{S}BA) \quad \text{cf 70.3}$$
$$= tr(\bar{S}AB) - tr(A\bar{S}B) = tr((\bar{S}A - A\bar{S})B) = tr([\bar{S},A]B).$$

- Montrons donc que $\bar{S} \in \mathfrak{g}$.

$\bar{S} = P\bar{D}P^{-1} = P\,\mathrm{diag}(\bar{\lambda_i})P^{-1}$. Considérons $P_1 \in \mathbb{C}[X]$ "le" polynôme d'interpolation des $(\lambda_i, \bar{\lambda_i})$. On a alors $P_1(D) = P_1(\mathrm{diag}\,\lambda_i) = \mathrm{diag}(P(\lambda_i))$
soit $P_1(D) = \mathrm{diag}(\bar{\lambda_i}) = \bar{D}$ donc $P_1(S) = P\,P_1(D)\,P^{-1} = P\bar{D}P^{-1} = \bar{S}$.

Or $S \in \mathbb{C}[M]$ donc il existe $P_2 \in \mathbb{C}[X]$ tq $S = P_2(M)$. Alors $\bar{S} = P_1(P_2(M))$

Puisque $M \in \mathfrak{g}$ et que $\mathfrak{g}$ est stable par combinaisons $\mathbb{C}$-linéaires on a $\bar{S} \in \mathfrak{g}$

On en déduit $[\bar{S}, A] \in \mathfrak{g}$ donc par hypothèse $\operatorname{tr}([\bar{S}, A], B) = 0$
Soit $\underline{\operatorname{Tr}(\bar{S}M) = 0}$ donc $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 = 0$. Par conséquent $\forall i \in [1..n]$ $\lambda_i = 0$, $D = 0$ et $\underline{S = 0}$. D'où $M = N$ est nilpotente.
Puisque les combinaisons linéaires de nilpotentes le sont encore on est assuré que $\forall M \in D\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $M$ est nilpotente.
De plus $D(\mathfrak{g}) \leq \mathfrak{g} \leq \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ donc on peut appliquer le théorème d . . . . Il nous assure l'existence d'un drapeau $\mathcal{V}$ de $\mathbb{C}^n$ tel que $D(\mathfrak{g}) \leq b_{\mathbb{K}}^{nilp}(\mathcal{V})$. Or comme $b_{\mathbb{K}}^{nilp}(\mathcal{V})$ cela assure en particulier que $D(\mathfrak{g})$ est nilpotente, donc d'après 82.3 que $\mathfrak{g}$ $\underline{\text{résoluble}}$.