Opérations sur les idéaux

Lang, Algèbre p 94/95

94.0 **Rappel** • $(A,+,\times)$ est un anneau $\Leftrightarrow \begin{cases} (A,+) \text{ est un groupe commutatif} \\ (A,\times) \text{ est un monoïde.} \end{cases}$

• On note alors 0 le neutre de $(A,+)$, et 1 celui de $(A,\times)$.

⚠ A priori on n'a pas $0 \neq 1$!

• On dit que $(A,+,\times)$ est commutatif si la loi $\times$ l'est.

94.1 **Déf** Soit A un anneau commutatif. Soit $I \subset A$.

I est un idéal de $A \Leftrightarrow \begin{cases} (I,+) \text{ est un sous-groupe de } (A,+) \\ \forall a \in A, \forall i \in I, \ ai \in I. \end{cases}$

94.2 **Pté** Soit A un anneau commutatif. Soient I et J deux idéaux de A.

- $I + J = \{ i+j \mid i \in I, j \in J \}$ est un idéal de A
- $I \cdot J = \langle \{ i \times j \mid i \in I, j \in J \} \rangle$ est un idéal de A. groupe engendré
- A est un idéal de A
- $\{0\}$ est un idéal de A.

Preuve (a) Par commutativité de la loi $+$ on montre facilement que $(I+J,+)$ est un sous-groupe de $(A,+)$.

Soit $i+j \in I+J$. Soit $a \in A$, $a(i+j) = \underbrace{ai}_{\substack{\in I \\ \text{car } I \text{ idéal}}} + \underbrace{aj}_{\in J \text{ car } J \text{ idéal}} \in I+J$.

Donc $I+J$ est bien un idéal.

(b) Par définition $I.J$ est un sous-groupe de $(A,+)$

Soit $a \in A$. Soit $x \in IJ$. x s'écrit $\sum_{k=1}^{n} i_k \times j_k$ pour $(i_k, j_k)_{k \in [\![1,n]\!]} \in (I \times J)^n$.

Alors $ax = a \sum_{k=1}^{n} i_k \times j_k = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{a i_k}_{\in I} \times \underbrace{j_k}_{\in J} \in I.J$.

Donc $I.J$ est bien un idéal.

(c) Clair

(d) Car 0 est absorbant.

94.3 **Pté** Soit A un anneau commutatif. Notons $Id(A)$ l'ensemble de ses idéaux

- $(Id(A), +)$ est un monoïde d'élément neutre $\{0\}$ et $+$ est commutative
- $(Id(A), \cdot)$ est un monoïde d'élément neutre A
- On a la distributivité de $\cdot$ et $+$ sur $Id(A)$.

<u>Preuve</u> (a) $\forall I \in Id(A), \quad I + \{0\} = \{ i + 0 \mid i \in I \} = I$

Donc $\{0\}$ est bien le neutre de la loi $+$ sur $Id(A)$.

L'associativité et la commutativité de la loi $+$ sur $Id(A)$ découlent directement de celles de $+$ sur A.

(b) - $\forall I \in Id(A)$. $I = \{ i \times 1 \mid i \in I \} \subset IA$ car $1 \in A$ et $IA \subset I$ car I idéal.

Donc $I.A = \langle IA \rangle = \langle I \rangle = I$ car I déjà un grpe.

Donc A est bien neutre pour $\cdot$ sur $Id(A)$.

- Soit $(I, J, K) \in Id(A)^3$.

$$(I.J).K = \left\{ \sum_{m=1}^{N} x_m k_n \;\middle|\; N \in \mathbb{N}, (x_n)_{n \in [1..N]} \in (I.J)^N, (k_n)_{n \in [1..N]} \in K^N \right\}$$

$$= \left\{ \sum_{m=1}^{N} \left(\sum_{m=1}^{M_n} i_{n,m} \times j_{n,m} \right) \times k_n \;\middle|\; N \in \mathbb{N}, (M_n)_{n \in [1..N]} \in \mathbb{N}^N, \begin{array}{l} \forall n \in [1..N] \\ \forall m \in [1..M_n] \end{array} \underset{\in I, J, K}{(i_{n,m}, j_{n,m}, k_n)} \right\}$$

$$= \left\{ \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M_n} \underbrace{i_{n,m}}_{\in I} \times \underbrace{(j_{n,m} \times k_n)}_{\in JK} \;\middle|\; \text{———} \right\}$$

$$\subset I.(J.K)$$

On montre de même l'inclusion réciproque, d'où l'associativité de $\cdot$.

(c) Soit $(I, J, K) \in Id(A)^3$.

$$I.(J+K) = \langle \{ i \times x \mid i \in I, x \in J+K \} \rangle = \langle \{ i \times (j+k) \mid (i,j,k) \in I \times J \times K \} \rangle$$

$$= \langle \{ ij + ik \mid (i,j,k) \in I \times J \times K \} \rangle$$

$$= \left\{ \sum_{m=1}^{N} i_n j_n + i_n k_n \;\middle|\; N \in \mathbb{N}, \forall n \in [1..N] \ (i_n, j_n, k_n) \in I, J, K \right\}$$

Quitte à ajouter des termes nuls en introduisant des $j_n = 0$ ou $k_n = 0$

$$= \left\{ \sum_{m=1}^{N} i_n j_n + \sum_{m=1}^{M} i_m k_m \;\middle|\; (N, M) \in \mathbb{N}^2 \ \begin{array}{l} \forall n \in [1..N] \ (i_n, j_n) \in I \times J \\ \forall m \in [1..M] \ (i_m, k_m) \in I \times K \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \sum_{n=1}^{N} i_n j_n \;\middle|\; N \in \mathbb{N}, \forall n \in [1..N], (i_n, j_n) \in I \times J \right\} + \left\{ \sum_{m=1}^{M} i_m k_m \;\middle|\; M \in \mathbb{N}, \forall m \in [1..M], (i_m, k_m) \in I \times K \right\}$$

$$= I.J + J.K$$ D'où la distributivité.

⚠ Il n'y a pas d'opposé pour les idéaux non nuls donc $A \neq \{0\} \Rightarrow (Id(A), +)$ n'est pas un groupe !