Nombre de Stirling de 2^{nd} espèce

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}$.

On note $\mathcal{P} = \left\{ (p_\ell)_{\ell \in [1..k]} \in \mathcal{P}([1..n])^k \;\middle|\; \forall (i,j) \in [1..k]^2,\ i \neq j \Rightarrow p_i \cap p_j = \emptyset \text{ et } \bigcup_{\ell \in I} p_\ell = [1..n] \right\}$

= l'ensemble des k-partitions ordonnées.

↳ où l'on autorise une partie à être vide.

NB : $|\mathcal{P}| = k^n$.

$\mathcal{P}^* = \left\{ \_\_\_\_\_\_ \;\middle|\; \forall (i,j) \in [1..k]^2\ i \neq j \Rightarrow p_i \cap p_j = \emptyset,\ \bigcup_{\ell} p_\ell = [1..n] \text{ et } \forall \ell \in [1..n]\ p_\ell \neq \emptyset \right\}$

= l'ensemble des k-partitions ordonnées dans lesquelles aucune partie n'est vide.

NB $|\mathcal{P}^*|$ n'est pas facile à calculer mais $\mathcal{S}(k,n) = \frac{1}{k!} |\mathcal{P}^*|$

$\mathcal{S}(k,n)$ est le nb de Stirling de 2^{nd} espèce = le nbre de partition de $[1..n]$ en k parties non vides.

$\mathcal{R} = \left\{ (I, m) \in \mathcal{P}([1..k]) \times [1..k]^n \;\middle|\; I \neq [1..k] \text{ et } m \in ([1..k] \setminus I)^n \right\}$

= l'ensemble des représentations sous forme
-> boîte interdite
-> mot décrivant la répartition dans les boîtes non interdites des n élém^t
des k-partitions de n éléments.

$\forall \ell \in [1..k]$, $\varphi_\ell = \begin{pmatrix} \mathcal{R} \to \mathcal{P}([1..n]) \\ (I, m) \mapsto \{ i \in [1..n] \mid m_i = \ell \} \end{pmatrix}$ = contenu de la boîte i selon m

NB par définition de $\mathcal{R}$, $\forall \ell \in [1..k]$ $\forall (I,m) \in \mathcal{R}$, $\varphi_\ell(I,m) = \emptyset$ if $\ell \in I$.

$\varphi = \begin{pmatrix} \mathcal{R} \to \mathcal{P} \\ (I,m) \mapsto (\varphi_\ell)_{\ell \in [1..k]} \end{pmatrix}$ se vérifie facilem^t.

$\forall r = (I,m) \in \mathcal{R}$, on note $i(r) = |I|$ nombre de boîtes interdites

$$\sum_{r\in R}(-1)^{i(r)} = \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i \times \underbrace{|\{r\in R \mid i(r)=i\}|}$$

de manière constructive. $\binom{k}{i}$ façons de choisir I puis $(k-i)^n$ mot à n lettres sur $[1..k]\setminus I$.

$$= \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i \times \binom{k}{i} \times (k-i)^n$$

Par ailleurs

$$\sum_{r\in R}(-1)^{i(r)} = \sum_{p\in P}\underbrace{\sum_{r\in \varphi^{-1}(p)}(-1)^{i(r)}}$$

on va MQ $\quad = \begin{cases}1 & \text{si } p\in P^*\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

ainsi on aura $S(k,n) = \frac{1}{k!}|P^*| = \frac{1}{k!}\sum_{r\in R}(-1)^{i(r)}$

$$= \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n$$

Soit $p\in P$. On note $j = |\{\ell\in[1..k] \mid p_\ell=\emptyset\}|$ nombre de boîtes vide.

Si $r\in R$ est tel que $\varphi(r)=p$ (ie $r\in\varphi^{-1}(p)$)
alors on a $i(r)\le j$ (car les boîtes interdites sont néc. vides)

Donc $\displaystyle\sum_{r\in\varphi^{-1}(p)}(-1)^{i(r)} = \sum_{i=0}^{j}\sum_{\substack{r\in\varphi^{-1}(p)\\ i(r)=i}}(-1)^i$

$$= \sum_{i=0}^{j}(-1)^i\,\Big|\{(I,m)\in R \mid |I|=i \text{ et } \underbrace{\qquad\qquad}\}\Big|$$

laisse un seul m possible, entièrement déterminé par p

$$= \sum_{i=0}^{j}(-1)^i\,\Big|\{I\subset[1..j] \mid |I|=i\}\Big|$$

$$= \sum_{i=0}^{j}(-1)^i\binom{j}{i}$$

cf feuille 3

$$= \begin{cases}1 & \text{si } j=0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Or $j=0$ revient à dire que $p\in P^*$. CQFD.

Le nombre de k-partitions sans parties vide d'un ensemble à n élém^t est

$$\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n$$

Pté $\displaystyle\sum_{i=0}^{j} (-1)^i \binom{j}{i} = \begin{cases} 1 & \text{si } j=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

En effet, pour $j=0$ on a $(-1)^0 \binom{0}{0} = 1$.

Supposons maintenant $j \geqslant 1$. On montre que cette somme est nulle par récurrence.

Si $j=1$ on a $(-1)^0 \binom{1}{0} + (-1)^1 \binom{1}{1} = + \binom{1}{0} - \binom{1}{1} = +1-1=0$

Soit $j \geqslant 1$. on suppose la propriété vraie au rang j.

$$\sum_{i=0}^{j+1} (-1)^i \binom{j+1}{i} = \binom{j+1}{0} + \sum_{i=1}^{j} (-1)^i \binom{j+1}{i} + (-1)^{j+1} \binom{j+1}{j+1}$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{j} (-1)^i \left[\binom{j}{i} + \binom{j}{i-1} \right] + (-1)^{j+1}$$

$$= \underbrace{(-1)^0 \binom{j}{0} + \sum_{i=1}^{j} (-1)^i \binom{j}{i}}_{=0 \text{ par HR}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{j-1} (-1)^{i+1} \binom{j}{i} + (-1)^{j+1} \binom{j}{j}}_{= -\left(\sum_{i=0}^{j} (-1)^i \binom{j}{i} \right) = 0 \text{ par HR}}$$

$$= 0$$

Donc la propriété est vraie par récurrence.