# 224 : Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

# I Développements asymptotiques de suites et comportement des séries

## 1) Convergence de séries à termes positifs

ex On pose $(u_n) = \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

On se demande si $\sum u_n$ converge.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+2}{2n+3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1^-$

Ici la règle de Cauchy ne permet pas de conclure, on doit donner plus qu'un équivalent de ce quotient.

**Règle de Raab-Duhamel** [G] p205

Si $\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

alors il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim \frac{\lambda}{n^\alpha}$

en particulier $\sum u_n$ converge ssi $\alpha > 1$.

ex ici $\frac{2n+3}{2n+2} = 1 + \frac{1/2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

donc $\sum u_n$ diverge.


Bibliographie :

[G] Gourdon, Analyse (Ellipses)

[D] J. Dieudonné, Calcul Infinitésimal. (Hermann)

[MV] Moisan - Vernotte. Topologie et séries (Ellipses)

[ZQ] Zuily-Queffélec. Analyse pr l'agreg (Dunod)

[R] Rombaldi - Eléments d'analyse réelle


## 2) Sommation des relations de comparaison

[G] p 202

**Pté** Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites de $\mathbb{R}^+$ telles que $u_n \sim v_n$ en $+\infty$

- Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ aussi et $\sum_{k\geq n} u_k \sim \sum_{k\geq n} v_k$ (en $n\to+\infty$) (i)
- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ aussi et $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$ (en $n\to+\infty$) (ii)

ex $\frac{1}{n} \sim \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ donc $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{(i)}{\sim} \log(n)$

On montre ensuite que $U_n = H_n - \log(n)$ converge vers une constante, notée $\gamma$, appelée cst d'Euler

ainsi $H_n = \log(n) + \gamma + o(1)$

Par (ii) on obtient $\gamma - U_n \sim -\frac{1}{2}\sum_{k\geq n} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{2n}$

d'où $H_n = \log(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{2n}\right)$

**Méthode**

Supposons que l'on ait $\sum_{k=1}^{n} u_k \sim c \cdot f(n)$

On pose $w_n = u_n - c(f(n) - f(n-1))$.

En remplaçant $f(0)$ par 0 on a $\sum_{k=1}^{n} w_k = o(f(n))$

- Si $\sum_{k\geq 0} w_k$ diverge alors,

  $\sum_{k=1}^{n} w_k \sim c_1 \cdot f_1(n)$ avec $f_1(n) = o(f(n))$

  et $\sum_{k=1}^{n} u_k = c \cdot f(n) + c_1 \cdot f_1(n) + o(f_1(n))$

- Si $\sum_{k\geq 0} w_k$ converge, alors

  $\sum_{k=1}^{n} u_k = c f(n) + c_1 \cdot f_1(n) + S + o(f_1(n))$ où $S = \sum_{k=1}^{+\infty} w_k$ et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k \sim c_1 \cdot f_1(n)$ et $f_1(n) = o(f(n))$

## 3) Suites récurrentes et séries associées

Soit $I = [0, a[$ où $a$ est eventuellement $+\infty$.

Soit $f \in \mathcal{F}(I, I)$ telle que $\begin{cases} \forall x \in ]0,a[ \ f(x) < x \\ f(0) = 0. \end{cases}$

Pour $u_0 \in ]0,a[$, la suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers 0.

On cherche → un équivalent de $u_n$ en $+\infty$

→ à savoir si $\sum u_n$ converge

**Méthode** [MV] II.E.1 p77/108

Si $f(x) = x - \lambda x^{1+\alpha} + o(x^{1+\alpha})$ où $\lambda > 0$, $\alpha > 0$

alors $u_n \sim \frac{1}{(n\alpha\lambda)^{1/\alpha}}$

et donc $\sum u_n$ converge ssi $\alpha < 1$

ex du sinus itéré $I = [0, \pi/2[$, $f = \sin$

puisque $\sin(x) = x - \frac{1}{3}x^{1+2} + o(x^{1+2})$

on a $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$ donc $\sum u_n$ diverge

ex du "logarithme" itéré $I = \mathbb{R}^+$, $f = x \mapsto \ln(1+x)$

puisque $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^{2+1} + o(x^{1+1})$

on a $u_n \sim \frac{2}{n}$ et donc $\sum u_n$ diverge

ex $I = \mathbb{R}^+$; $f = x \mapsto x e^{-(x^\beta)}$ où $\beta > 0$

$u_n \sim \left(\frac{1}{\beta n}\right)^\beta$ puisque $f(x) = x - 1x^{1+\beta} + o(x^{1+\beta})$

Donc la série $\sum u_n^{2-\beta}$ converge ssi $\beta < 1/2$

ex $I = [0, \frac{1}{2}[$ et $f = x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ x\left(1 + \frac{1}{\ln(x)}\right) \text{ sinon} \end{cases}$ [MV] II.E.2

La méthode préc. n'est pas adaptée car on n'a pas facilement de DL de $f$ en 0 d'ordre $> 1$.

On étudie alors $v_n = |\ln(u_n)|$. $v_{n+1}^2 - v_n^2 \to 2$

donc $v_n \sim \sqrt{2n}$, donc il existe $K > 0$ tq $u_n \leq K e^{-\sqrt{2n}}$

donc $\sum u_n$ cv.

# II Etude d'une série définie par une fonction

## 1) Comparaison série - intégrales. [D] p101

Soit g une fonction $\mathcal{C}^1$ et $>0$ au voisinage de $+\infty$

Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère $S_n = \sum_{k=0}^{n} g(k)$

De plus si $S_n$ converge vers $S$, on pose $R_n = S - S_n$.

### Méthode

Si $\frac{g'(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \mu \in \mathbb{R}^*$ (ie $\frac{g'}{g} \sim \mu$) (11.5)

alors si $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt = +\infty$

alors $S_n \sim \frac{\mu}{1-e^{-\mu}} \int_a^n g(t)\,dt$

sinon $S_n$ converge et $R_n \sim \frac{\mu}{1-e^{-\mu}} \int_n^{+\infty} g(t)\,dt$

Si $\frac{g'(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ (11.6)

alors si $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt = +\infty$

alors $S_n \sim \int_a^n g(t)\,dt$

sinon $S_n$ converge et $R_n \sim \int_n^{+\infty} g(t)\,dt$

Si $\left|\frac{g'(x)}{g(x)}\right| \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $g$ monotone (11.7)

alors si $g$ est croissante

alors $S_n \sim g(n)$ et même $S_n = \sum_{i=0}^{p} g(n-i) + o(g(n-i))$

si $g$ est décroissante

alors $S_n$ converge, $R_n \sim g(n+1)$ et $R_n = \sum_{i=0}^{p} g(n+i) + o(g(n+i))$

ex $\sum_{k=2}^{n} 2^k \ln(k) \sim 2^{n+1} \ln(n)$ avec $g(x) = 2^x \ln(x)$ ; $\frac{g'(x)}{g(x)} \to \ln(2)$

et en utilisant $\int_1^x 2^t \ln(t)\,dt \sim \frac{1}{\ln(2)} \times 2^x \ln(x)$ d'après III 4)

ex $\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ avec $\frac{g(x)}{g'(x)} = \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{x^\alpha} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ si $\underline{\alpha > -1}$

$\sum_{k=n}^{+\infty} k^\alpha \sim \frac{n^{\alpha+1}}{-(\alpha+1)}$ ———————— si $\underline{\alpha < -1}$

ex $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$ avec $\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{-1/x^2}{1/x} = -\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

ex $\sum_{k=1}^{n} k^k = n^n + (n-1)^{n-1} + (n-2)^{n-2} + o((n-2)^{n-2})$

$= n^n + \frac{1}{e} n^{n-1} + \left(\frac{1}{2e} + \frac{1}{e^2}\right) n^{n-2} + o(n^{n-2})$

## 2) Formule d'Euler - Mac Laurin [G] p [D] p

### Méthode

Soit $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ ac $m<n$. Soit $f \in \mathcal{C}^p([m,n], \mathbb{C})$ où $p>0$

On a $\sum_{k=m}^{n} f(k) = \int_m^n f(t)\,dt + \frac{f(m)+f(n)}{2}$

$+ \sum_{j=2}^{p} \frac{b_j}{j!} \left(f^{(j-1)}(n) - f^{(j-1)}(m)\right) + R_p$

avec $R_p = \frac{(-1)^{p-1}}{p!} \int_m^n \tilde{B}_p(t)\, f^{(p)}(t)\,dt$

où $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignent les nombres de Bernoulli

$(\tilde{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignent les polynômes de Bernoulli prolongés par périodicité.

ex Série harmonique $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \sum_{j=2}^{p-1} \frac{(-1)^{j-1} b_j}{j\, n^j} + O\left(\frac{1}{n^p}\right)$

ex $\log(\Gamma(z)) = z\log(z) - z - \frac{1}{2}\log(z) + \frac{1}{2}\log(2\pi)$

$+ \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{k-1} b_k}{2k(2k-1)} \frac{1}{z^{2k-1}} + 2i k_z \pi + O\left(\frac{1}{|z|^{2p}}\right)$

pour $z \to +\infty$, où $k_z$ est un entier dépendant de $z$

# III Obtenir un developpement ass. de fonction

## 1) Formule de Taylor-Young

### Méthode

Si $f$ est $(n-1)$ fois dérivable au voisinage de $a$ et $n$ fois ——— en $a$

alors $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$

ex $x \mapsto (1+x)^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$, est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$

on obtient $\forall n \in \mathbb{N}$ $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha-i)}{k!} x^k + o(x^n)$

ex $\tan$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$, on obtient

$\tan(x) = x + x^3/3 + 2/15\, x^5 + o(x^6)$

ex $\sin$ est $\mathcal{C}^\infty$. En $\pi/2$ on obtient alors

$\sin(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-\pi/2)^2 + o((x-\pi/2)^3)$

Rq Pour une fonction comme $x \mapsto \sqrt{\cos(x)}$, cette méthode n'est pas adaptée car calculer les dérivées n'est pas évident. On obtient un DL par composition.

## 2) Opérations sur les DL

### a) Composition [R] p211-213

**Pté** Si $\begin{cases} f(x) = P(x) + o(x^n) \\ g(x) = Q(x) + o(x^n) \\ g(0) = 0 \end{cases}$

alors $f\circ g(x) = R(x) + o(x^n)$

où $R$ s'obtient en tronquant $P(Q(x))$ au deg. $n$.

ex $\cos(\sqrt{x}) = 1 - x/2 + x^2/4! + o(x^3)$

$\frac{1}{1+x^3} = 1 - x^3 + x^6 + o(x^8)$

## Méthode (DL d'inverse, de √, de log)

Soit $f$ telle que $f(0) \neq 0$.
On pose $\varphi : x \mapsto 1 - f(x)/f(0)$ ainsi $\begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ f = f(0)(1-\varphi) \end{cases}$

Si $\varphi(x) = Q(x) + o(x^n)$

alors $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(0)} \times P(Q(x)) + o(x^n)$ où $P = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$

$(f(x))^\alpha = f(0)^\alpha P(Q(x)) + o(x^n)$ où $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha - i)(-1)^k x^k}{k!}$

$\log(f(x)) = \log(f(0)) + P(Q(x))$ où $P = \sum_{k=1}^{n} -\frac{x^k}{k}$.

ex $\frac{1}{\cos(x)} = 1 + x^2/2 + 5/24\, x^4 + o(x^5)$

$\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt{2}\,(1 - 1/8\, x - 5/128\, x^2) + o(x^2)$

$\ln(\cos(x)) = -1/2\, x^2 - 1/12\, x^4 - 1/45\, x^6 + o(x^7)$

## Méthode (DL d'une réciproque)

Si $f$ est bijective et $\mathcal{C}^m$ au voisinage de 0, avec $f(0) = 0$ alors $f^{-1}$ est $\mathcal{C}^m$ au vois de 0, et admet donc par T-Y un DL d'ordre $m$. Par composition $x = f^{-1} \circ f(x)$ en admet aussi un. En identifiant avec $x = x + o(x^m)$ on obtient le DL de $f^{-1}$.

ex $f = x \mapsto x + \ln(1+x)$ ; $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}x^2 + o(x^2)$

### b) Multiplication et combinaison linéaire [R] p210

## Méthode

Si $f(x) = P(x) + o(x^n)$ $g(x) = Q(x) + o(x^n)$
alors $fg(x) = R(x) + o(x^n)$ où $R$ est la troncature de $P \times Q$
$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ $\lambda f + \mu g(x) = \lambda P(x) + \mu Q(x) + o(x^n)$

ex $\tan(x) = \sin(x) \times \frac{1}{\cos(x)} = x + 1/3\, x^3 + 2/15\, x^5 + o(x^5)$

ex $e^x/(1+x) = 1 + x^2/2 - x^3/3 + 3/8\, x^4 + o(x^4)$

ex $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2m+1})$ $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$

### c) Intégration [R] p 214

## Méthode

Si $f$ est $\mathcal{C}^1$ au vois. de 0 et $f'(x) = P(x) + o(x^n)$
alors $f(x) = f(0) + Q(x) + o(x^{n+1})$
où $Q$ est la primitive de $P$ s'annulant en 0

ex $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$ en intégrant $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k + o(x^{n-1})$

ex $\arctan(x) = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + o(x^8)$
en intégrant $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + o(x^7)$

⚠ On ne peut pas dériver un DL
ex $x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = o(x^2)$ (car $x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$)
mais $f = x \mapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'est pas 2 × dérivable en 0

### 3) Équivalent d'intégrales à paramètres [ZQ] IX.VI

On se donne une intégrale à paramètre $t > 0$, de la forme $F(t) = \int_a^b f(x)\, e^{t\varphi(x)}\, dx$ où $I = ]a,b[$ est un intervalle de $\mathbb{R}$
$f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$, $\varphi \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{C})$

ex $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x}\, dx$ la fonction gamma d'Euler.

## Méthode de Laplace [ZQ] p 338 DEV

Si $\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}^{+*},\ x \mapsto f(x)\, e^{t\varphi(x)} \text{ est intégrable sur } I \\ \varphi' \text{ s'annule en un unique point } x_0 \\ \varphi''(x_0) < 0 \quad \text{et } f(x_0) \neq 0 \end{cases}$

alors $F(t) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{t\,|\varphi''(x_0)|}}\, e^{t\varphi(x_0)} f(x_0)$ (en $t \to +\infty$)

ex Par un changem^t de var on se ramène à
$\Gamma(1+t) = t^{t+1} \int_0^{+\infty} e^{t\varphi(y)}\, dy$ où $\varphi = \ln - \mathrm{id}$ admet 1 unique maximum en 1
donc $\Gamma(t+1) \sim \sqrt{2\pi}\, t^{t+1/2} e^{-t}$ (en $t \to +\infty$)
on en déduit la formule de Stirling $m! \sim \sqrt{2\pi}\, m^{m+1/2} e^{-m}$

### 4) Équivalent d'une primitive [D] p 93-97

Soit $g$ une fonction $\mathcal{C}^1$ et $> 0$ sur $]a, +\infty[$

## Méthode (équivalent de $\int g$)

Si $\frac{x\, g'(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \mu \neq -1$

alors si $\mu > -1$, $\int_a^x g(t)\, dt \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x\, g(x)}{\mu + 1}$

si $\mu < -1$ $\int_x^{+\infty} g(t)\, dt \underset{x \to +\infty}{\sim} -\frac{x\, g(x)}{\mu + 1}$

ex $\int_1^x \frac{1}{\ln(t)}\, dt \sim \frac{x}{\ln(x)}$ s'obtient avec $g = t \mapsto 1/\ln(t)$
$tg'/g = -1/\ln \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 = \mu$

## Méthode (équivalent de $\int g$)

Si $h = g/g'$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]a, +\infty[$ et $h'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

alors si $g' > 0$ au vois. de $+\infty$, $\int_a^x g(t)\, dt \sim g(x)^2/g'(x)$

si $g' < 0$ ——— , $\int_x^{+\infty} g(t)\, dt \sim g(x)^2/|g'(x)|$

ex $\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\, dt \sim \frac{e^{-x^2}}{2x}$ ex $\int_e^x \frac{e^{\sqrt{\log t}}}{t \log(t)} \sim \frac{2 e^{\sqrt{\log(x)}}}{\sqrt{\log x}}$

### 5) Développement asymptotique de fonctions implicites

On se donne $u$ définie implicitement par $G \circ u = \mathrm{id}$ où $G$ st ↗

ex $u_1$ solution de $y^5 + y = x$ [D] p 85- DEV
$u_2$ ——— $y/\ln(y) = x$

## Méthode

Par changement de var. on se ramène à une équa' $u(x) - g(u(x)) = x$ telle que

→ $g$ est $\mathcal{C}^1$ au $v(+\infty)$
→ $g'$ est $\neq 0$ et monotone au $v(+\infty)$, avec $g'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$
→ $\forall c \in \mathbb{R}$ $g'(x + c\, g(x)) \sim g'(x)$ en $x \to +\infty$.

Alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0(x) = x \\ \forall n \geq 1\ u_n(x) = x + g(u_{n-1}(x)) \end{cases}$
vérifie $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et $u(x) - u_n(x) \sim g(x)(g'(x))^n$

ex $u_1(x) = x^{1/5} - 1/5\, x^{-3/5} + o(x^{-7/5})$ ex $u_2(x) = x\ln(x) + o(x \ln(x))$