Sous-groupes compacts de $Gl_n(\mathbb{R})$

Références [A] Alessandri, thèmes de géométrie. p141 /160.
[T] Tauvel, Cours de Géométrie (1ère éd. Dunod), p77

Leçons .

.

NB ⚠ Le développement est à adapter en fonction des leçons.
J'ai ici découpé en parties inégales mais cohérentes il me semble, de sorte que l'une ou l'autre puisse ê admise selon la leçon.

1) Un corollaire utile du lemme de Carathéodory. [T] p77.

Carathéodory : Dans un $\mathbb{R}$-EV E de dimension finie n, l'enveloppe convexe d'une partie $A \subset E$ s'écrit comme l'ensemble des combinaisons convexes d'au plus $n+1$ points de A.

Preuve 1). L'ensemble des combinaisons convexes de points de A forme un convexe — par associativité du barycentre si l'on veut — qui contient A, et donc contient néc l'enveloppe convexe $\mathrm{Conv}(A)$.
Réciproquement un ensemble contenant A mais pas l'une de ces comb. convexes ne saurait être convexe, donc ts les cvx contenant A contiennent ces points, donc $\mathrm{Conv}(A)$ les contient.

Par double inclusion on peut écrire $\mathrm{Conv}(A) = \left\{ \sum_{i=0}^{k} \lambda_i a_i \;\middle|\; \begin{array}{l} k \in \mathbb{N} \\ \forall i \in [1..k]\ a_i \in A,\ \lambda_i \in [0,1] \\ \sum \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$

2) Montrons maintenant qu'on peut se restreindre aux comb. cvx de $n+1$ points.
Si $x \in \mathrm{Conv}(A)$ s'écrit $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i a_i$, et que $k > n$ (sinon rien à faire).
La famille de vecteurs $(v_i)_{i\in[1..k]} = (\overrightarrow{a_0 a_i})_{i \in [1..k]}$ est alors néc. liée car de cardinal supérieur à la dimension de l'espace.
Donc il existe $(\mu_i)_{i\in[1..k]}$ tel que $\sum \mu_i v_i = 0$.
On pose alors $\gamma_0 = \sum_{i=1}^{k} \mu_i$ et $\forall i \in [1..k]\ \gamma_i = -\mu_i$.
Ainsi $\sum_{i=0}^{k} \gamma_i = +\sum_{i=1}^{k} \mu_i + \sum_{i=1}^{k} -\mu_i = 0$

Donc (lemme d'existence du barycentre) $\forall m \in E$, $\sum_{i=0}^{k} \gamma_i \overrightarrow{ma_i} = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \overrightarrow{a_0 a_i} = -\sum_{i=1}^{k} \mu_i \overrightarrow{a_0 a_i} = 0$

En posant $\alpha = \min\left\{ \frac{\lambda_i}{\gamma_i} \mid i \in [0..k],\ \gamma_i > 0 \right\} = \frac{\lambda_{i_0}}{\gamma_{i_0}}$ on a alors

→ $\sum_{i=0}^{k} (\lambda_i - \alpha\gamma_i) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i - \alpha \sum_{i=0}^{k} \gamma_i = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$

→ $\lambda_{i_0} - \alpha\gamma_{i_0} = \lambda_{i_0} - \frac{\lambda_{i_0}}{\gamma_{i_0}} \gamma_{i_0} = 0$ donc $\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_0}}^{k} (\lambda_i - \alpha\gamma_i) = 1$.

→ $\overrightarrow{a_{i_0} x} = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \overrightarrow{a_{i_0} a_i} = \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq i_0}}^{k} \lambda_i \overrightarrow{a_{i_0} a_i} + \alpha \underbrace{\sum_{i=0}^{k} \gamma_i \overrightarrow{a_{i_0} a_i}}_{=\vec{0}} = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_0}}^{k} (\lambda_i + \alpha\gamma_i) \overrightarrow{a_{i_0} a_i}$

Donc $x = \mathrm{bar}(a_i, \lambda_i + \alpha\gamma_i)_{i \in [0..k] \setminus i_0}$. On s'est ramené à un barycentre de $k-1$ pt.
En itérant on écrit x comme barycentre de $n+1$ points.

Pté L'enveloppe convexe d'un compact est compacte (dans un $\mathbb{R}$-EV de dim. finie) [A] p160

Soit E un $\mathbb{R}$-EV de dimension n. Soit K un compact de E. Notons $C = Conv(K)$.
Par le lemme de Carathéodory $C = \{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i k_i \mid (\lambda_i)_{i\in[0..n]} \in \mathbb{R}^{n+1},\ \sum \lambda_i = 1 \text{ et } (k_i)_{i\in[0..n]} \in K^{n+1} \}$

Autrement dit $C = \varphi(K^{n+1} \times \Lambda_{n+1})$ où $\varphi = \begin{pmatrix} K^{n+1} \times \Lambda_{n+1} \longrightarrow E \\ (k_i)\ (\lambda_i) \longmapsto \sum_{i=0}^{n} \lambda_i k_i \end{pmatrix}$ continue.

et $\Lambda_{n+1} = \{ (\lambda_i)_{i\in[0..n]} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum \lambda_i = 1 \}$

Λ_{n+1} est compact (car fermé borné en dim. finie)
K^{n+1} et donc $K^{n+1} \times \Lambda_{n+1}$ le sont en tant que produit de compact.
Donc C est compact comme image continue d'un compact.

2) Un lemme de point fixe

Pté Soit E un $\mathbb{R}$-EV de dimension finie. Soit $\widehat{G}$ un sous-groupe de $GL(E)$. Soit $K \subset E$.
Si $\begin{cases} \widehat{G} \text{ est compact} \\ K \text{ est convexe compact} \\ \forall \tilde{g} \in \widehat{G},\ \tilde{g}(K) \subset K \end{cases}$, alors K admet un point $\widehat{G}$-fixe.
(ie il existe $k_0 \in K$ tq $\forall \tilde{g} \in G,\ \tilde{g}(k) = k$).

L'idée ici est de construire une norme $\widehat{G}$-invariante et strictement convexe.
La stricte convexité assurera que K admet un unique point de norme minimale, et la $\widehat{G}$-invariance assurera que ce point est un point $\widehat{G}$-fixe.

1) Soit N une norme euclidienne sur E. On pose $N' = \begin{pmatrix} E \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto \max_{\tilde{g}\in\widehat{G}} N(\tilde{g}(x)) \end{pmatrix}$

Elle est bien définie car l'ensemble $\{N(\tilde{g}(x)) \mid \tilde{g} \in \widehat{G}\}$ est compact pour tout $x \in E$, (comme image du compact $\widehat{G}$ par $\varphi_x = \begin{pmatrix} \widehat{G} \to \mathbb{R}^+ \\ \tilde{g} \mapsto N(\tilde{g}(x)) \end{pmatrix}$ continue), et admet donc bien un maximum.

N' est homogène car N l'est
N' est à valeur dans $\mathbb{R}^+$ car N l'est
N' est défini* car N l'est et parce que les $\tilde{g} \in G$ sont inversibles.
N' vérifie l'inégalité triangulaire, car N aussi et que $\max(\Sigma) \leq \Sigma \max$
] N' est une <u>norme sur E</u>.

$\forall x \in E, \forall \tilde{g}_0 \in \widehat{G},\ N'(\tilde{g}_0(x)) = \max_{\tilde{g}\in\widehat{G}} N(\tilde{g} \circ \tilde{g}_0(x)) = \max_{\tilde{g}'\in\widehat{G}} N(g'(x)) = N'(x)$.
Donc <u>N' est $\widehat{G}$-invariante</u>

Soit $(x,y) \in E^2$. Il existe $\tilde{g}_0 \in \widehat{G}$ tq $N'(x+y) = N(\tilde{g}_0(x+y)) = N(\tilde{g}_0(x) + \tilde{g}_0(y)) \leq N(\tilde{g}_0(x)) + N(\tilde{g}_0(y)) \leq N'(x) + N'(y)$
Donc si $N'(x+y) = N'(x) + N'(y)$, alors $N(\tilde{g}_0(x) + \tilde{g}_0(y)) = N(\tilde{g}_0(x)) + N(\tilde{g}_0(y))$.
Or puisque N est euclidienne cette égalité dans l'inégalité triangulaire implique que $\tilde{g}_0(x)$ et $\tilde{g}_0(y)$ sont positivement liés, donc x et y le sont aussi (car $\tilde{g}_0 \in GL(E)$).
(Cela équivaut à dire que N' est <u>strictement convexe</u>)

* définie comme dans "définie positive" ie vaut 0 en 0.

2) Par <u>compacité de K</u> on sait qu'il existe $k_0 \in K$ de norme N' minimale.
Si $k_1 \in K$ tel que $N'(k_1) = N'(k_0)$ on a

$$N'\left(\frac{k_0+k_1}{2}\right) \leq N'\left(\frac{k_0}{2}\right) + N'\left(\frac{k_1}{2}\right) = \frac{N'(k_0)}{2} + \frac{N'(k_1)}{2} = N'(k_0)$$

Or par <u>convexité de K</u> $\frac{k_0+k_1}{2} \in K$, donc $N'\left(\frac{k_0+k_1}{2}\right) \geq N'(k_0)$ par minimalité de $N'(k_0)$.

Finalement on a $N'\left(\frac{k_0+k_1}{2}\right) = N'(k_0) = N'\left(\frac{k_0}{2}\right) + N'\left(\frac{k_1}{2}\right)$.

Par "stricte convexité" de N' $\frac{k_0}{2}$: $\frac{k_1}{2}$ sont donc positivement liés, donc k_0 et k_1 aussi.
Or k_0 et k_1 sont de m̂ norme. Donc <u>$k_0 = k_1$</u>. <u>D'où l'unicité</u>

3) Puisque <u>N' est $\widehat{G}$-invariante</u> on a $\forall \hat{g} \in \widehat{G}$, $N'(\hat{g}(k_0)) = N'(k_0)$.
Par l'unicité du point de norme minimale dans K, on a $\forall \hat{g} \in \widehat{G}$, $\hat{g}(k_0) = k_0$.
On a bien exhibé un point $\widehat{G}$-fixe dans K

3) La propriété principale

<u>**Pté**</u> Si G est un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$,
alors G est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.

On pose $\rho = \begin{pmatrix} G \longrightarrow GL(S_n(\mathbb{R})) \\ A \longmapsto (S \mapsto {}^tASA) \end{pmatrix}$ (ρ est un morphisme de groupe de $(G, \square)$ dans $GL(S_n(\mathbb{R}))$ où $\square = \begin{pmatrix} G^2 \to G \\ A,B \to BA \end{pmatrix}$)

C'est une action de groupe de G sur $S_n(\mathbb{R})$, et puisque l'action de $g \in G$ est un automorphisme (<u>linéaire</u>), c'est m̂ une représenta° de G sur l'EV $S_n(\mathbb{R})$.

C'est bien défini car $\forall A \in G$, $\forall S \in S_n(\mathbb{R})$, ${}^t({}^tASA) = {}^tA\,{}^tS\,{}^{tt}A = {}^tASA$ dc ${}^tASA \in S_n(\mathbb{R})$.

ρ est continue car polynomiale

Pour avoir une base plus agréable on étend l'action de G à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, autrement dit on considère $\hat{\rho} \begin{pmatrix} G \to GL(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \\ A \mapsto (M \mapsto {}^tAMA) \end{pmatrix}$.
On note $\mathcal{B} = (E_{i,j})_{(i,j) \in [1..n]^2}$ la base canonique des mat. élémentaires
Pour $A \in G$ on a

$$\begin{aligned} Mat_{\mathcal{B}}\, \hat{\rho}(A) &= \left(({}^tA E_{k,l} A)_{i,j}\right)_{((i,j),(k,l)) \in ([1..n]^2)^2}. \\ &= \left(\sum_{u=1}^{n} {}^tA_{i,u} (E_{k,l}A)_{u,j}\right) \dots \\ &= \left(\sum_{u=1}^{n} A_{u,i} \sum \delta_{k,u} \delta_{l,v} A_{v,j}\right) \dots \\ &= (A_{k,i} \times A_{l,j}) \dots \end{aligned}$$

On pose <u>$\widehat{G} = \rho(G)$</u>. C'est un sous groupe compact de $GL(E)$ où $E = S_n(\mathbb{R})$
car c'est l'image d'un groupe compact par un morphisme de grp. continu.

On note <u>Ω_{I_n}</u> l'orbite de I_n sous l'action de G.

On a $\Omega_{I_n} = \{{}^tAA \mid A \in G\} = \varphi(G)$ où $\varphi = \begin{pmatrix} G \to S_n(\mathbb{R}) \\ A \mapsto {}^tAA \end{pmatrix}$ continue, donc Ω_{I_n} compact et $\subset S_n^{++}(\mathbb{R})$

On pose <u>$K = Conv(\Omega_{I_n})$</u>, ainsi K est un convexe compact de $E = S_n(\mathbb{R})$, et comme $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe on a en outre <u>$K \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$</u>

…uvoir appliquer le lemme il reste à vérifier que pour $\hat{g} \in \hat{G}$, $\hat{g}(K) \subset K$.
… les éléments de K s'écrivent comme combinaison convexe (a fortiori comb. linéaire) d'éléments … et que les élém^{ts} de $\hat{G}$ sont linéaires il suffit de MQ $\hat{G}$ stabilise Ω_{I_n}.

…$\in \hat{G}$. Il existe $A \in G$ tel que $\hat{g} = \rho(A)$.
…$B \in \Omega_{I_n}$.

$\hat{g}({}^tBB) = \rho(A)({}^tBB) = {}^tA\,{}^tBBA = {}^t(BA)BA \in \Omega_{I_n}$

Donc Ω_{I_n} est $\hat{G}$ stable, donc K est aussi $\hat{G}$ stable.

… le lemme il existe donc $k \in K$ qui est $\hat{G}$-fixe.
… $K \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tq $k = S^2$.

… $\forall A \in G$, $\rho(A)(k) = k$ soit ${}^tASSA = SS$ soit $S^{-1}\,{}^tASSAS^{-1} = I_n$
… $S_n(\mathbb{R})$ donc $\begin{cases} S^{-1} = {}^tS^{-1} \\ S = {}^tS \end{cases}$ donc ${}^t(SAS^{-1})SAS^{-1} = I_n$, ie $SAS^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.

… $SGS^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$ $\left(\begin{array}{l}\text{Et puisque la conjugaison dans } GL_n(\mathbb{R}) \text{ est un automorphisme de groupe} \\ SGS^{-1} \text{ est bien un sous groupe}\end{array}\right)$

Une approche quadratique.

<u>Rappel</u>
$O_n(\mathbb{R}) = O(I_n) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) \mid {}^tMM = I_n\} = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \forall X \in \mathbb{R}^n \ \langle MX|MX\rangle = {}^tX\,{}^tMMX = {}^tXX = \langle X|X\rangle\}$
$O(q) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) \mid {}^tMQM = Q\} = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \forall X \in \mathbb{R}^n \ \langle MX|MX\rangle_q = {}^tX\,{}^tMQMX = {}^tXQX = \langle X|X\rangle_q\}$
pour q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ et $\langle\,|\,\rangle_q$ le produit scalaire associé.
Q sa matrice dans la base canonique.

J'ai dis qu'on a $\rho(A)(k) = k$ on a ${}^tAkA = k$ soit $A \in O(k)$
Cela explique a posteriori qu'on ait étudié ρ : les points fixes par $\rho(G)$ contenait néc G dans leur groupe orthogonal.