
Feuille d'exercices n°1 - Problèmes et fonctions

Notions abordées

- problèmes : formalisation, paramètres, instances, comparaisons, réduction
- fonctions : spécification, choix des paramètres
- division euclidienne, quotient, reste, modulo
- écriture en base $b \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

Exercices sur les problèmes

Exercice 1 Problèmes sur les polynômes

Question 1

Donner une écriture formelle des problèmes ci-dessous en identifiant bien quelles sont les données du problème, et dans quel ensemble varie chaque paramètre.

- A. Décider si un polynôme du second degré admet une racine réelle.
- B. Donner la valeur d'une fonction polynomiale du second degré en un réel x .
- C. Dire combien de racines réelles a un polynôme du second degré.
- D. Décider si un réel est racine d'un polynôme du second degré.
- E. Donner la valeur d'une fonction polynomiale du troisième degré en un réel x .

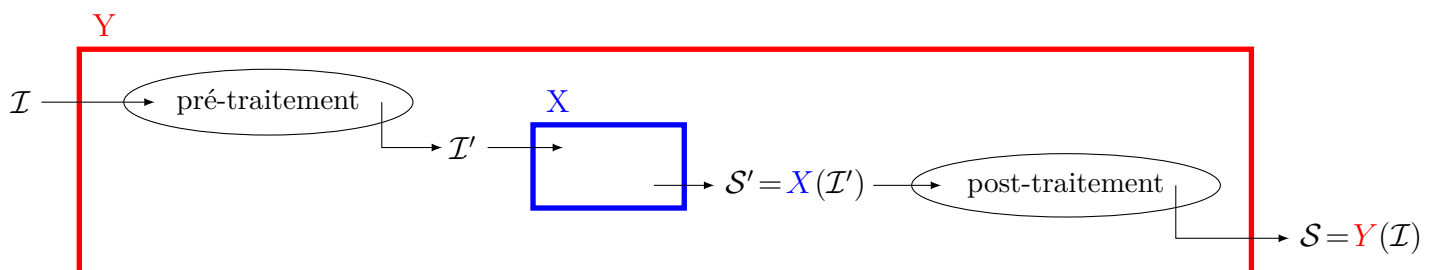
Question 2

Pour chacun des problèmes ci-dessus, donner 3 instances accompagnées de leur solution.

Définition 1 (*réduction au sens large*)

On dira qu'un problème X est **plus dur** qu'un problème Y , ou que Y se **réduit à** X , si on peut facilement résoudre Y sachant résoudre X .

Attention, il s'agit d'avoir une méthode pour résoudre n'importe quelle instance de Y en utilisant une boîte noire résolvant X , on ne fait aucune hypothèse sur la méthode résolvant X .



Question 3

Identifier les réductions existant entre les problèmes ci-dessus.

Justifier ces réductions, c'est-à-dire expliquer comment résoudre un problème à partir d'un autre.

Exercice 2 Problèmes sur les congruences

Question 1

Donner une écriture formelle des problèmes ci-dessous en identifiant bien quelles sont les données du problème, et dans quel ensemble varie chaque paramètre.

- A. Calculer le quotient et le reste d'une division euclidienne.
- B. Décider si un entier est multiple de 3.
- C. Décider si deux entiers sont congrus modulo 3.
- D. Calculer le reste modulo 3 d'un entier.

Question 2

Identifier les réductions existant entre les problèmes ci-dessus.

Justifier ces réductions, c'est-à-dire expliquer comment résoudre un problème à partir d'un autre.

Exercices sur les fonctions

NB : Dans cette feuille, on se restreint à n'utiliser que des entiers (type `int`), en évitant les réels et le type `float` qu'on verra plus tard.

Exercice 3 Fonctions pour le calcul de surface

On suppose dans cet exercice qu'on dispose d'une fonction implémentée en C dont l'en-tête est la suivante.

```
int surface_rectangle (int l1, int l2)
// hyp : l1>=0 && l2>=0
//calcule la surface d'un rectangle dont les côtés sont de longueurs l1 et l2
```

Question 1

Quel appel de fonction permet d'obtenir la surface en m^2 d'un rectangle de 2m par 3m ?

Question 2

Comment obtenir la surface en m^2 d'un rectangle de 2cm par 3m ?

D'un rectangle de 20cm par 30cm ?

Question 3

Pour deux entiers naturels a et b , que peut-on dire des valeurs de `surface_rectangle(a,b)` et

surface_rectangle(b,a) ?

Question 4

Proposer un jeu de test pour la fonction `surface_rectangle`.

Question 5

Combien de paramètre faut-il pour déterminer la surface d'un carré ? En déduire l'en-tête d'une fonction implémentée en C qui calculerait la surface d'un carré. Proposer une implémentation de cette fonction utilisant `surface_rectangle`, ainsi qu'un jeu de test.

Question 6

Proposer une fonction, en pseudo-code ou en C, qui calculerait le volume d'un parallélépipède rectangle.

Préciser quel appel de fonction permettrait alors d'obtenir le volume d'un cube de côté a .

Exercice 4 Fonctions d'une bibliothèque graphique

On travaille dans cet exercice en supposant qu'on dispose d'une bibliothèque graphique minimale implémentée en C. Les images sont en noir et blanc, ainsi un pixel a la valeur 0 ou 1. Les images sont de taille fixe 100×100 . Un pixel est repéré par une abscisse $x \in [0..99]$, et une ordonnée $y \in [0..99]$. Attention les ordonnées vont de haut en bas, ainsi les pixels d'ordonnée $y=0$ sont situés sur la première ligne, tout en haut de l'image.

Les en-têtes de cette librairie sont les suivantes :

```
1 | Image dessine_rectangle (int x, int y, int l, int h)
2 | //retourne une image sur laquelle figure un rectangle noir
3 | //dont le coin supérieur gauche est de coordonnées (x,y),
4 | //de largeur l pixels et de hauteur h pixels
5 |
6 | void affiche_image (Image img)
7 | //affiche à l'écran l'image img
8 |
9 | Image superpose (Image img1, Image img2)
10 | //retourne la superposition des images img1 et img2,
11 | //dans la superposition, un pixel est blanc ssi il l'était dans les 2 images
```

Question 1

Préciser les coordonnées des quatre coins d'une image.

Question 2

Quel appel de fonction ou quels appels de fonctions permettent d'afficher une image blanche avec un carré noir de taille 50×50 dans le coin en bas à droite ?

Question 3

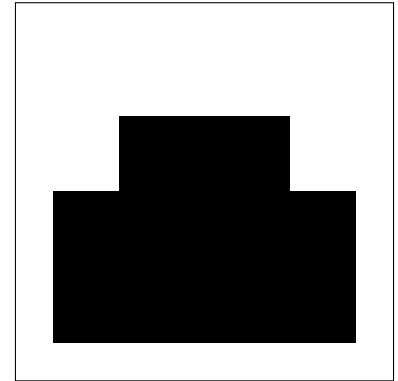
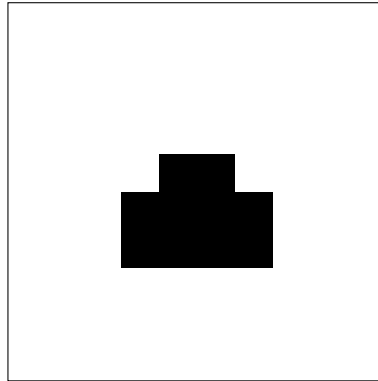
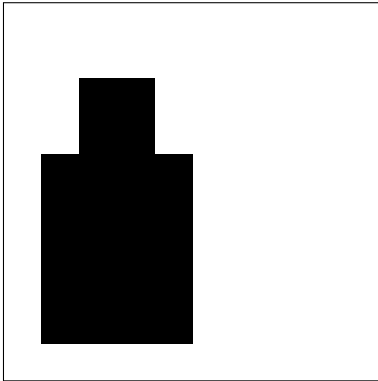
Quel appel de fonction ou quels appels de fonctions permettent d'afficher l'image d'un damier 2×2 (*i.e.* un damier carré à 4 cases), dont la case en haut à gauche est noire?

Question 4

Pour $(x,y) \in [0..99]^2$, on note respectivement `img1(x,y)`, `img2(x,y)` et `s(x,y)` la valeur du pixel de coordonnées (x,y) des images `img1`, `img2` et de leur superposition.

Comment calculer la valeur de $s(x, y)$? Donner une expression de $s(x, y)$ en fonction de $\text{img1}(x, y)$, $\text{img2}(x, y)$.

On veut créer une fonction qui affiche en noir sur fond blanc une tour à deux étages rectangles, centrés l'un par rapport à l'autre, dont l'étage supérieur est deux fois moins large que l'étage inférieur. Cette fonction doit permettre d'afficher par exemple les images ci-dessous. *Afin de faciliter le centrage des étages, on suppose que la largeur de l'étage supérieur est paire.*



Question 5

Proposer une famille de paramètres pour cette fonction. Ils doivent permettre de déterminer de manière exacte quelle tour on souhaite obtenir. Placer sur un dessin toutes les coordonnées utiles à la construction de l'image à partir des paramètres proposés. Finalement, donner une définition de la fonction souhaitée, avec un nom bien choisi, une en-tête complète, et une définition qui utilise bien-sûr la librairie proposée.

Pour aller plus loin

Exercice 5 Sur la décomposition en base b

Question 1

Démontrer l'unicité du quotient et du reste dans la division euclidienne.

Question 2

Donner la valeur explicite du k -ième chiffre dans l'écriture en base $b \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ d'un entier $n \in \mathbb{N}$. Démontrer le résultat proposé.

Question 3


Donner le nombre minimal de chiffres nécessaires pour écrire un entier n en base $b \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Exercice 6 Clé du numéro de sécurité sociale


Un numéro de sécurité sociale est un numéro à 15 chiffres entre 0 et 9. Bien qu'il s'écrive comme tel, ce numéro n'est pas à comprendre comme un nombre entier, il ne représente pas une quantité, mais il encode plusieurs informations :

- le premier chiffre (le plus à gauche) donne le sexe de la personne,
- les deux suivants donnent l'année de naissance,


- les deux suivants donnent le mois de naissance,
- ...
- les deux derniers (les plus à droite) forment une clé qui permet de détecter des erreurs de saisie. Il s'agit en fait de 97 moins le reste modulo 97 de l'entier écrit en base 10 par tous les chiffres précédents, tous les chiffres significatifs.

Question 1 


Expliquer en quoi ce genre de clé permet de détecter des erreurs de saisie ?
Est-ce que cette détection est infaillible ?

Question 2 


Montrer que 97 est un nombre premier.

Question 3 



Utiliser la primalité de 97 pour montrer que la clé permet de détecter toutes les erreurs de saisie ne portant que sur un seul chiffre.

Question 4 

On considère un numéro de sécurité sociale. Soit n l'entier que ce numéro décrit en base 10. Comment obtenir la clé de ce numéro à partir de n (ou l'entier correspondant en base 10) ?

Question 5 


Avec les mêmes notations, comment obtenir le numéro sans la clé à partir de n (ou l'entier correspondant en base 10) ?

Question 6  


Donner la définition d'une fonction qui teste la validité d'un numéro de sécurité sociale au sens où la clé est correcte.

Exercice 7 Comment implémenter le tour de magie binaire


Cet exercice est prévu pour être fait après une démonstration dudit tour de magie en classe. On cherche à implémenter une interface qui simule ce tour.

Question 1 


Quel paramètre ou quels paramètre faut-il fixer avant de commencer le tour ?
Demandez-vous ce qui doit être fixé pour générer les cartes.

Question 2 

Quelles informations doivent être récupérées auprès de la personne à qui on fait le tour ?

Question 3 

Quelles données doivent être calculées par le programme pour faire ce tour ?

Question 4 

Proposer un découpage en fonctions intermédiaires pour l'implémentation de cette interface.