Algorithme de Dijkstra

Dijkstra ($G=(S,A,w)$ un graphe orienté pondéré avec $S = [\![1..n]\!]$, $w \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^+)$
$s \in S$ un sommet "source".)

```
D ← tableau indicé par [1,n], initialisé à +∞
P ← ____________________, ______________ -1

D[s] ← 0
P[s] ← s
O ← {s}        // ensemble des ouverts
F ← ∅          // ens. des sommets fermés.

Tant que O est non vide
    u ← extraire de O un sommet minimisant D
    Pour tout v ∈ Succ(u)
        Si D[v] = +∞
            O.ajouter(v)
        Si D[u] + w(u,v) < D[v]
            D[v] ← D[u] + w(u,v)
            P[v] ← u
    F.ajouter(u)
retourner D     (ou P selon les usages...)
```

__NB__ : F n'est utile que pour la preuve
O devrait ê implémenté par une file de priorité auquel cas lorsque $D[v]$ est modifié, la priorité de v dans O doit être mise à jour.

Pté | Soit $G=(S,A,\omega)$ un graphe orienté pondéré positivem^t.
Soit $s\in S$.
Le tableau D retourné lors de l'appel Dijkstra(G,s) est tel que $\forall \ \in S,\ D[u]=d(s,u)$

Preuve

Déf | Pour $X\subseteq S$ et $(u,v)\in S^2$, on note $\mathcal{C}_X(u,v)$ l'ensemble des chemins élémentaires de u à v dans G dont tous les sommets sauf éventuellement v sont dans X.
On note alors $d_X(u,v)=\min\{\text{long}(c)\mid c\in\mathcal{C}_X(u,v)\}$

Fixons (G,s) une entrée de l'algorithme et considérons l'appel Dijkstra(G,s). On admet qu'il termine et on note K le nombre de tours de boucle "Tant que" réalisés.

Pour $k\in[0..K]$ on note O_k (resp F_k) l'ensemble des élém^t contenus dans O (resp F) à la fin du k-ième tour.
De plus, pour $u\in[1..n]$, on note $D_k[u]$ la valeur enregistrée dans la case d'indice u de D à la fin du k-ième tour

Montrons par réc. finie sur $k\in[0..K]$ la pté

P_k : $\underline{\forall u\in F_k,\ D_k[u]=d(s,u)}$ α_k
$\underline{\forall u\in S,\ D_k[u]=d_{F_k}(s,u)}$ β_k
$\underline{O_k\cup F_k=\{u\in[\![1,n]\!]\mid D_k[u]<+\infty\} \text{ et } O_k\cap F_k=\emptyset}$ γ_k

- Initialement, on a $F_0=\emptyset$, $O_0=\{s\}$, $\forall u\in S,\ D_0[u]=\begin{cases}0 & \text{si } u=s\\ +\infty & \text{sinon.}\end{cases}$
Donc γ_0 est vraie. De plus comme $F_0=\emptyset$, α_0 est triviale.
Enfin $\forall u\in S,\ \mathcal{C}_{F_k}(s,u)=\begin{cases}\{(s)\} & \text{si } u=s\\ \emptyset & \text{sinon}\end{cases}$ (car (s) est un chemin de s à s dont tous les sommets sauf s sont do...)
donc $\forall u\in S,\ d_{F_k}(s,u)=\begin{cases}0 & \text{si } u=s\\ +\infty & \text{sinon}\end{cases}=D_0[u]$, ainsi β_0 est vraie.

Donc $\underline{P_0 \text{ est vraie}}$.

- Soit $k\in[0..K-1]$. On suppose P_k vraie et on veut montrer P_{k+1}.
On note x le sommet extrait de O à l'étape $k+1$.

On a alors
- $D_k[x] = \min\{D_k[u] \mid u \in O_k\}$ car le sommet extrait minimise D.
- $F_{k+1} = F_k \cup \{x\}$

  et puisque $x \in O_k$, d'après γ_k, $x \notin F_k$

  donc $F_{k+1} = F_k \sqcup \{x\}$.
- $O_{k+1} = \underbrace{O_k \setminus \{x\}}_{\subseteq F_k^c \setminus \{x\} \text{ par } \gamma_k \; = F_{k+1}^c} \cup \underbrace{\{y \in succ(x) \mid D_k[y] = +\infty\}}_{\subseteq \{x\}^c \text{ car } x \notin Succ(x) \text{ et } \subseteq (O_k \cup F_k)^c \text{ par } \gamma_k}$

  (si $D_k[y] = +\infty$, $y \notin (O_k \cup F_k)$)

  donc $O_{k+1} \subseteq (F_{k+1})^c$ soit $O_{k+1} \cap F_{k+1} = \emptyset$.

  De plus les éléments ajoutés à $O_k \cup F_k$ dans $O_{k+1} \cup F_{k+1}$ sont exactement ceux dont la valeurs dans D_k est $+\infty$, mais devient une valeur finie dans D_{k+1}.

  Ainsi $F_{k+1} \cup O_{k+1} = \{u \in S \mid D_k[u] \neq +\infty\}$. D'où $\underline{\gamma_{k+1}}$
- $\forall u \in S$, $D_{k+1}[u] = \begin{cases} D_k[u] & \text{si } u \notin Succ(x) \\ \min(D_k[u], D_k[x] + \omega(x,u)) & \text{si } x \in Succ(x) \end{cases}$

  en particulier $\underline{D_{k+1}[u] \leq D_k[u]}$ δ
- Comme $F_k \subseteq F_{k+1}$, on a $\underline{\forall u \in S,\ d_{F_k}(s,u) \geq d_{F_{k+1}}(s,u)}$ ρ

Montrons β_{k+1} ie $\forall u \in S$, $d_{F_{k+1}}(s,u) = D_{k+1}[u]$.

- On remarque déjà que $D_k[s] = 0$ car $D_0[s] = 0$, $\forall i \in [0..k]$ $D_i[s] \geq 0$ et $(D_i[s])_{i \in [0..k]} \searrow$ (d'après δ itéré). Or $\forall X \subseteq S$, $(s) \in \mathcal{C}_X(s,s)$ donc $d_{F_k}(s,s) \leq long((s)) = 0$ soit $d_{F_k}(s,s) = 0 = D_k[s]$.
- Soit $u \in S \setminus \{s\}$. Soit $(c_i)_{i \in [0..\ell]} \in \mathcal{C}_{F_{k+1}}(s,u)$. (avec $c_0 = s$, $c_\ell = u \neq s$ donc $\ell > 0$)

  On note $p = c_{\ell-1}$ et $\tilde{c} = c_0 \cdots c_{\ell-1}$.

  Ainsi $long(c) = long(\tilde{c}) + \omega(p,u)$.

  On aimerait MQ $long(c) \geq D_{k+1}[u]$.

  On distingue 2 cas selon p.

→ Si $p \neq x$. Comme $p \in F_{k+1} = F_k \sqcup \{x\}$, on en déduit $p \in F_k$.

D'après β_{F_k}, $d_{F_k}(s,p) = D_k[p]$, or par α_k $D_k[p] = d(s,p)$.

On en déduit qu'il existe un chemin $\tilde{b} \in \mathcal{C}_{F_k}(s,p)$ de longr. $d(s,p)$.

Alors le chemin $b = \tilde{b} \circ u$ (valide car $\tilde{b}$ finit en p et $(p,u) \in A$)

est constitué de sommets qui, sauf peut être le dernier, sont

dans F_k, donc $b \in \mathcal{C}_{F_k}(s,u)$, donc $\text{long}(b) \geq d_{F_k}(s,u) = D_k[u]$

$$\begin{aligned} \text{Or } \text{long}(b) &= \text{long}(\tilde{b}) + \omega(p,u) \\ &= d(s,p) + \omega(p,u) \quad \text{par construc}^\circ \text{ de } \tilde{b} \\ &\leq \text{long}(\tilde{c}) + \omega(p,u) \quad \text{car } \tilde{c} \text{ est un chemin de } s \text{ à } p. \\ &= \text{long}(c). \qquad \text{donc } D_k[u] \leq \text{long}(c) \end{aligned}$$

En fait on a montré que $\underline{\forall \gamma \in F_{k+1}(s,u) \text{ avec } \gamma_{|\gamma|-1} \neq x, \text{long}(\gamma) \geq D_k[u]}$ μ

→ Si $p = x$, comme c est un chemin élém, p est le seul sommet

de $\tilde{c}$ égal à x, on en déduit que $\tilde{c} \in \mathcal{C}_{F_k}(s,p) = \mathcal{C}_{F_k}(s,x)$.

On a donc $\text{long}(\tilde{c}) \geq d_{F_k}(s,x) \overset{\beta_k}{=} D_k[x]$

Donc $\text{long}(c) = \text{long}(\tilde{c}) + \omega(x,u) \geq D_k[x] + \omega(x,u)$.

En fait on a montré que $\underline{\forall \gamma \in F_{k+1}(s,u) \text{ ac. } \gamma_{|\gamma|-1} = x, \text{long}(\gamma) \geq D_k[x] + \omega(x,u)}$ ν

Grâce à ces 2 propriétés, montrons que $D_{k+1}[u] = d_{F_{k+1}}(s,u)$.

$\underline{1^{\text{er}} \text{ cas}}$ Si $u \notin \text{succ}(x)$, alors $D_{k+1}[u] = D_k[u]$.

Soit $c \in F_{k+1}(s,u)$. Puisque $u \notin \text{succ}(x)$, $c_{|c|-1} \neq x$.

Donc d'après μ, $\text{long}(c) \geq D_k[u]$.

En passant au min sur c, on en déduit $d_{F_{k+1}}(s,u) \geq D_k[u]$

Or $d_{F_{k+1}}(s,u) \leq d_{F_k}(s,u) \overset{\beta_k}{=} D_k[u]$. D'où $\underline{d_{F_{k+1}}(s,u) = D_k[u] = D_{k+1}[u]}$

$\underline{2^{\text{e}} \text{ cas}}$ Si $u \in \text{succ}(x)$, alors $D_{k+1}[u] = \min(D_k[u], D_k[x] + \omega(x,u))$

D'après μ et ν, pour $c \in \mathcal{C}_{F_{k+1}}(s,u)$, $\text{long}(c) \geq D_k[u]$ ou $\text{long}(c) \geq D_k[x] + \omega(x,u)$

donc $\text{long}(c) \geq \min(D_k[u], D_k[x] + \omega(x,u)) = D_{k+1}[u]$.

En passant au min sur c, on obtient $\underline{d_{F_{k+1}}(s,u) \geq D_{k+1}[u]}$.

Et comme ci-dessus $d_{F_{k+1}}(s,u) \leq D_k[u]$.

Il reste à MQ $d_{F_{k+1}}(s,u) \leq D_k[x] + \omega(x,u)$ pour conclure.

- Si $D_k[x] = +\infty$, c'est évident.
- Sinon, $D_k[x] < +\infty$, soit d'après β_k. $d_{F_k}(s,x) < +\infty$.

  Il existe donc $\hat{c} \in \mathcal{C}_{F_k}(s,x)$ de longueur $D_k[x]$.

  Alors le chemin $c = \hat{c} \cdot u \in \mathcal{C}_{F_{k+1}}(s,u)$ car $F_k \subseteq F_{k+1}$ et $x \in F_{k+1}$.

  Donc $d_{F_{k+1}}(s,u) \le long(\hat{c}) = long(c) + \omega(x,u) = D_k[x] + \omega(x,u)$.

  Ayant déjà $d_{F_{k+1}}(s,u) \le D_k[u]$, on en déduit $d_{F_{k+1}}(s,u) \le \min(D_k[u], D_k[x]+\omega(x,u))$

  soit $\underline{d_{F_{k+1}}(s,u) \le D_{k+1}[u]}$

  Par double inégalité, $\underline{d_{F_{k+1}}(s,u) = D_{k+1}[u]}$ dans ce second cas, ce qui finit de démontrer β_{k+1} □

Montrons α_{k+1} ie $\forall u \in F_{k+1}$, $D_{k+1}[u] = d(s,u)$.

- Soit $u \in F_k$. D'après α_k $D_k[u] = d(s,u)$.
  - Si $y \notin succ(x)$, $D_{k+1}[u] = D_k[u]$, donc $\underline{D_{k+1}[u] = d(s,u)}$.
  - Si $y \in succ(x)$, supposons par l'absurde $D_{k+1}[u] \neq D_k[u]$.

    Comme $D_{k+1}[u] \le D_k[u]$ par δ, on en déduit que $D_{k+1}[u] < D_k[u]$,

    or $D_{k+1}[u] = \min(D_k[u], D_k[x]+\omega(x,u))$, donc $D_{k+1}[u] = D_k[x] + \omega(x,u)$

    En particulier, $D_k[x] < +\infty$, il existe donc $c \in \mathcal{C}_{F_k}(s,x)$ | $< D_k[u] < +\infty$ car $u \in F_k$ et γ_k

    de longueur $d_{F_k}(s,x) = D_k[x]$ par β_k.

    Alors $long(c \cdot u) = long(c) + \omega(x,u) = D_k[x] + \omega(x,u) < D_k[u] = d(s,u)$.

    ABS ! Car $c \cdot u$ est un chemin de s à u. D'où $\underline{D_{k+1}[u] = D_k[u] = d(s,u)}$

- Reste à MQ $D_{k+1}[x] = d(s,x)$.

  On sait que $D_{k+1}[x] = D_k[x]$ car $x \notin Succ(x)$, et $D_k[x] = d_{F_k}(s,x)$ par β_k

  Il suffit de MQ $d_{F_k}(s,x) = d(s,x)$. Par déf. $d_{F_k}(s,x) \ge d(s,x)$.

  Par l'abs, on suppose $d_{F_k}(s,x) > d(s,x)$. Il existe alors $(c_i)_{i \in [0..\ell]}$ un chemin de s à x de longueur $d(s,x)$, et ce chemin $\notin \mathcal{C}_{F_k}(s,x)$.

  On peut donc considérer $i_0 = \min\{i \in [0..\ell[\mid c_i \notin F_k\}$. Comme $c_0 = s \in F_k$, on a $i_0 > 0$. On pose $\hat{c} = (c_i)_{i \in [0..i_0]}$, ainsi $\hat{c} \in \mathcal{C}_{F_k}(s, c_{i_0})$.

  Donc $long(\hat{c}) \ge d_{F_k}(s, c_{i_0}) = D_k[c_{i_0}]$ par β_k

  or $long(\hat{c}) \le long(c) = d(s,x) < d_{F_k}(s,x) = D_k[x]$, soit $D_k[c_{i_0}] < D_k[x]$.

  Pourtant $D_k[c_{i_0}] < \infty$, donc $c_{i_0} \in F_k \cup O_k$ par γ_k et $c_{i_0} \notin F_k$ par construc°, donc on aurait $c_{i_0} \in O_k$ ac $D_k[c_{i_0}] < D_k[x]$. $\underline{\text{ABS}}$ par minimalité de x.

  Donc $\underline{D_{k+1}[x] = D_k[x] = d_{F_k}(s,x) = d(s,x)}$.

Ce qui finit de démontrer α_{k+1} □

Par réc finie sur $k \in [0..K]$, on en déduit en particulier que P_K est vraie. De plus en sortie de boucle on sait que O est vide, soit $O_K = \emptyset$. D'après γ_k on a donc $F_K = \{u \in S \mid D_K[u] < +\infty\}$.
soit $\forall u \in S \setminus F_k$, $D_k[u] = +\infty$.

En remarquant que pour $k \geq 1$ on a $\mathcal{B}(F_k) = O_k$, on a $\mathcal{B}(F_K) = \emptyset$, et comme $s \in F_K$, $\forall u \in S \setminus F_K$, il n'existe aucun chemin de s à u, donc $\forall u \in S \setminus F_K$, $d(s,u) = +\infty = D_K[u]$.

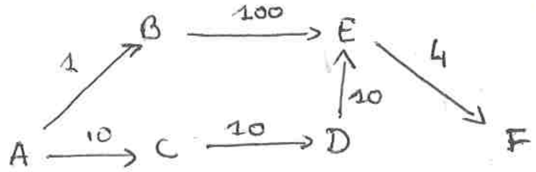
De plus, $\forall u \in F_K$, $D_K[u] = d(s,u)$ par α_K.

D'où la propriété annoncée □.

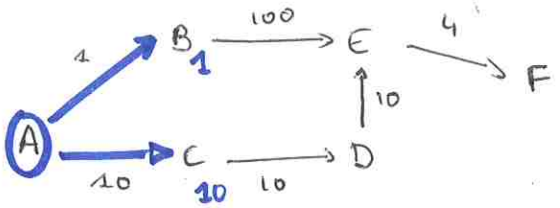
Contre-exemple

montrant qu'un parcours en largeur n'est pas optimal, m̂ si les successeurs d'un sommet x sont traités par ω(x,s) ↗

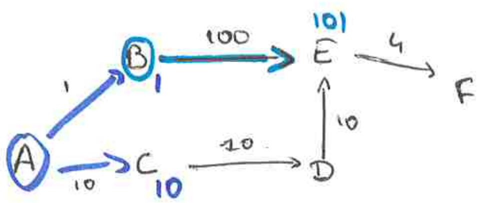
G :



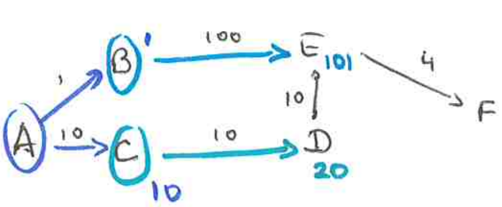
O = A



O = B, C

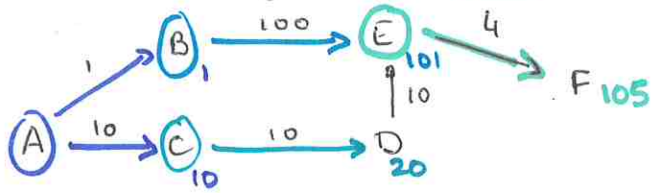


O = C, E

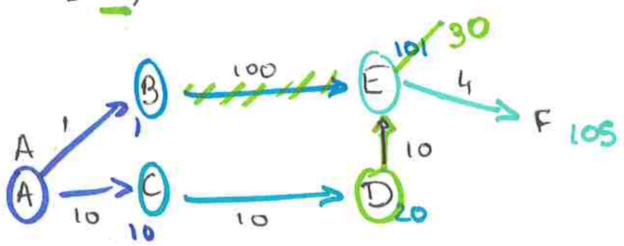


O = E, D

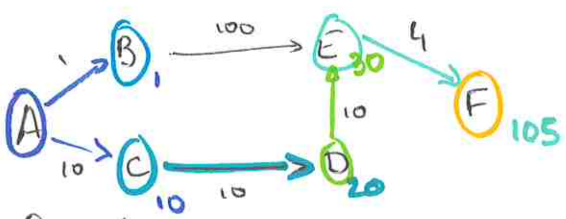
Le + court chemin de A à F est (A, C, D, E, F) de longueur 34, mais l'algo trouve une distance égale à 105.



O = D, F



O = F (on aurait envie de propager le 30, mais E a déjà été exploré.)



$O = \emptyset$

NB : Dans ce petit exemple on pourrait croire qu'il suffit de recalculer la dist. en remontant de père en père mais... non ! Ajouter par exemple $E \xrightarrow{5} G$ et $D \xrightarrow{50} G$: le père de G sera D, qui mène à 1 chemin de coût 70 vs 35 par E.