Leçon 204: Connexité: exemples et applications

Adrien Fontaine

23 décembre 2012

Table des matières

1 Généralités

1.1 Définitions et premières propriétés

Proposition 1

Soit (E, d) un espace métrique. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *Il n'existe pas de partition de E en deux ouverts disjoints non vides.*
2. *Il n'existe pas de partition de E en deux fermés disjoints non vides.*
3. *Les seules parties ouvertes et fermées de E sont $\emptyset$ et E.*

Démonstration : Gourdon , proposition 1p38 ■

Définition 1

Un espace métrique vérifiant l'une des assertions de la proposition précédente est dit connexe.

Parties connexes : Soit (E, d) un espace métrique et A une partie de E. On munit A de la distance d induite sur A. On veut savoir à quelle condition A est connexe. Les propriétés de la topologie induite sur A entraînent facilement le résultat qui suit :

Proposition 2

La partie A de E est connexe si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est réalisée :

1. *Si $A \subset O_1 \cup O_2$, où O_1 et O_2 sont des ouverts de E vérifiant $A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$, alors*

$$(A \cap O_1 = \emptyset \text{ et } A \subset O_2) \text{ ou } (A \cap O_2 = \emptyset \text{ et } A \subset O_1)$$

2. *Si $A \subset F_1 \cup F_2$, où F_1 et F_2 sont des fermés de E vérifiant $A \cap F_1 \cap F_2 = \emptyset$, alors*

$$(A \cap F_1 = \emptyset \text{ et } A \subset F_2) \text{ ou } (A \cap F_2 = \emptyset \text{ et } A \subset F_1)$$

Exemple 1

L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels n'est pas un connexe de $\mathbb{R}$ car si on se donne $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on a $\mathbb{Q} \subset]-\infty, a[\cup]a, +\infty[$.

1.2 Stabilité de la notion de connexité

Théorème 1

Soit $f : (E, d) \to (E', d')$ une application continue. Si E est connexe alors $f(E)$ est connexe.

Démonstration : Gourdon, théorème 1p39 ■

On note $D = \{0, 1\}$ muni de la distance discrète δ (distance de Kronecker). L'espace métrique (D, δ) n'est pas connexe puisque $D = \{0\} \cup \{1\}$ est réunion de deux fermés disjoints. Grâce à cet espace métrique, nous allons donner une caractérisation commode des connexes.

Proposition 3

Un espace métrique (E, d) est connexe si et seulement si toute application continue $f(E, d) \to$

(D, δ) est constante.

Démonstration : Gourdon, proposition 3p39 ■

Proposition 4

Soit A une partie connexe d'un espace métrique (E, d). Si une partie B de E vérifie $A \subset B \subset \bar{A}$, alors B est connexe.

Démonstration : Gourdon, proposition 4p40 ■

Dans le cas général, une réunion de connexes n'est pas connexe (par exemple, $\{0\}$ et $\{1\}$ sont connexes dans $\mathbb{R}$ mais $\{0, 1\}$ n'est pas connexe. On a cependant le résultat qui suit :

Proposition 5

Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille de connexes d'un espace métrique (E, d) telle que

$$\exists i_0 \in I, \forall i \in I \ C_i \cap C_{i_0} \neq \emptyset$$

Alors $\cup_{i \in I}$ est connexe.

Démonstration : Gourdon, proposition 5p40 ■

Remarque 1

Si $(C_i)_{i \in I}$ est une famille de connexes telle que $\cap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$, alors $\cup_{i \in I} C_i$ est connexe (si $x \in \cap_{i \in I} C_i$, tous ces connexes ont une intersection non vide avec le connexe $\{x\}$).

Dans le cas dénombrable, on a également le résultat qui suit :

Proposition 6

Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille au plus dénombrable de connexes telle que pour tout $i \in I$, $i \neq 0$, $C_i \cap C_{i-1} \neq \emptyset$. Alors $\cup_{i \in I} C_i$ est connexe.

Démonstration : Gourdon, proposition 6p40 ■

Proposition 7

Soient $(E_1, d_1), ..., (E_n, d_n)$ des espaces métriques (en nombre fini). L'espace produit $E = E_1 \times ... \times E_n$ est connexe si et seulement si E_i est connexe pour tout i.

Démonstration : Gourdon, proposition 7p40 ■

1.3 Composantes connexes

Soit (E, d) un espace métrique. On considère sur (E, d) la relation

$$(x \mathcal{R} y) \Leftrightarrow (\exists C \text{ connexe de } E \text{ tel que } x \in C \text{ et } y \in C)$$

Alors $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Si $x \in E$, sa classe d'équivalence, notée $\dot{x}$, est la réunion des connexes contenant x. C'est un connexe (en effet, tous les connexes contenant x ont tous une intersection non vide avec le connexe $\{x\}$). L'ensemble $\dot{x}$ s'appelle une *composante connexe* de E.

Les composantes connexes de E forment donc une partition de E. L'espace métrique E est connexe, si et seulement si, il n'a qu'une seule composante connexe.
Les composantes connexes de E sont des fermés de E.

1.4 Exemples de connexes

Théorème 2

Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$.

Démonstration : Un connexe de $\mathbb{R}$ est un intervalle. En effet, si $C \subset \mathbb{R}$ n'est pas un intervallen il existe $(a, b) \in C^2$ et $x \in \mathbb{R}$ tels que $a < x < b$ et $x \notin C$. Mais alors $C \subset]-\infty, x[\subset]x, +\infty[$, donc C n'est pas connexe.
Réciproquement, montrons qu'un intervalle I de $\mathbb{R}$ est connexe.
Si I est un singleton c'est immédiat. Si $I]a, b[$, considérons une application continue $f : I \to \{0, 1\}$. Si f n'est pas constante, il existe $x < y \in I$ tels que $f(x) \neq f(y)$, par exemple $f(x) = 0$ et $f(y) = 1$. On considère alors l'ensemble :

$$\Gamma = \{z \in I, z \geq x \text{ et } \forall t \in [x, z], f(t) = 0\}$$

L'ensemble Γ est non vide car $x \in \Gamma$. De plus γ est majoré par y. Soit $c = \sup \Gamma$. Comme f est continue, $f(c) = 0$. De même, f étant continue en c :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall t \in [c, c + \varepsilon], \delta(f(t), f(c)) < \frac{1}{2}$$

d'où pour tout $t \in [c, c + \varepsilon], f(t) = 0$, ce qui montre que $c + \varepsilon \in \Gamma$. Absurde par définition de c. Donc, f est constante et I est connexe. Tout intervalle I de $\mathbb{R}$ étant compris entre un intervalle ouvert et son adhérence, on en conclut d'après la proposition 4 que tout intervalle de $\mathbb{R}$ est connexe. ∎

On en déduit le théorème suivant, fondamental en analysé réelle :

Théorème 3 (*Théorème des valeurs intermédiaires*)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors $f(I)$ est un intervalle.

Démonstration : Le théorème précédent assure la connexité de I, donc $f(I)$ est connexe d'après le théorème 2 et donc c'est un intervalle. ∎

Connexité par arcs :

Définition 2

Soit (E, d) un espace métrique. On appelle chemin de E toute application $\gamma : [0, 1] \to (E, d)$, continue. L'image $\gamma([0, 1])$ du chemin s'appelle un arc, $\gamma(0)$ l'origine de l'arc et $\gamma(1)$ son extrémité.

Définition 3

Soit (E, d) un espace métrique. On dit que (E, d) est connexe par arcs si pour tout $(a, b) \in E^2$, il existe un arc inclus dans E d'origine a et d'extrémité b.

Théorème 4

Un espace connexe par arcs est connexe.

Démonstration : Gourdon, théorème 4p42 ■

Remarque 2

1. *Ainsi, un convexe étant clairement connexe par arcs est connexe.*
2. *La réciproque du théorème est fausse. En effet, si on considère* Γ *le sous-ensemble de* $\mathbb{R}^2$ *défini par :*

$$\Gamma = [\bigcup_{x\in\mathbb{Q}}(\{x\}\times\mathbb{R}^+)]\cup[\bigcup(\{x\}\times]-\infty,0[)]$$

est un connexe de $\mathbb{R}^2$ *qui n'est pas connexe par arcs. (Gourdon, exercice 5p44).*

2 Application de la notion de connexité

2.1 En Analyse complexe

Théorème 5

Soit γ *un chemin fermé* $(\gamma(0)=\gamma(1))$ *continument différentiable par morceaux,* Ω *le complémentaire de l'arc* γ *relativement au plan complexe, et définissons*

$$\forall z\in\Omega, Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

La fonction γ *est une fonction à valeurs entières sur* Ω *constante sur chaque composante connexe de* Ω*, nulle sur la composante connexe non bornée de* Ω*.*

Démonstration : Rudin, théorème 10.10p247 ■

Théorème 6 (*Théorème de Cauchy pour un triangle*)

Soit Δ *un triangle fermé, inclus dans un ouvert* Ω *du plan. Soit* $p\in\Omega$ *et soit* f *une fonction continue sur* Ω *telle que* $f\in H(\Omega\setminus\{p\})$*. On a :*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$$

Démonstration : Rudin, théorème 10.13p249 ■

Théorème 7 (*Théorème de Cauchy pour un ensemble convexe*)

Soit Ω *un ouvert convexe,* $p\in\Omega$*,* f *continue sur* Ω *et* $f\in H(\Omega\setminus\{p\})$*. On a pour tout chemin fermé continument différentiable* γ *dans* Ω*,*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Démonstration : Rudin, théorème 10.14p250 ■

Théorème 8 (*Formule de Cauchy pour un ensemble convexe*)

Soit γ un chemin fermé dans un ouvert convexe Ω, et soit $f \in H(\Omega)$. Si $z \in \Omega$ et si $z \notin Im(\gamma)$, on a :

$$f(z).Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi$$

Démonstration : Rudin, théorème 10.15p250 ■

Conséquence : Pour tout ouvert Ω du plan, toute $f \in H(\Omega)$ est analytique.

Théorème 9 (*Théorème des zéros isolés*)

Soit Ω un ouvert connexe et soit $f \in H(\Omega)$. Posons,

$$Z(f) = \{a \in \Omega / f(a) = 0\}$$

Alors ou bien $Z(f) = \Omega$ ou bien $Z(f)$ n'a pas de point d'accumulation dans Ω. De plus, $Z(f)$ est au plus dénombrable.

Démonstration : Rudin théorème 10.18p251 ■

En d'autres termes, une fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω est déterminée par ses valeurs sur tout ensemble qui possède un point d'accumulation dans Ω. Ceci est un important théorème d'unicité.

Remarque 3

Le théorème est en défaut si nous oublions l'hypothèse de connexité de Ω. Si $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, où Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts disjoints, il suffit de poser $f = 0$ sur Ω_1 et $f = 1$ sur Ω_2.

Théorème 10 (*Théorème du maximum*)

Soient Ω un domaine, $f \in H(\Omega)$ et $\bar{B}(a,r) \subset \Omega$ où $r > 0$. Alors

$$| f(a) | \leq \max_\theta | f(a + re^{i\theta}) |$$

et il y a égalité si et seulement si f est constante sur Ω.

Démonstration : Rudin théorème 10.24p254 ■

Par conséquent, à moins que f ne soit constante, $| f |$ ne possède pas de maximum local en un point quelconque de Ω. Une conséquence immédiate de ce théorème est le fameux théorème de d'Alembert Gauss :

Théorème 11 (*Théorème de d'Alembert Gauss*)

Tout polynôme non constant, à coefficients complexes, admet au moins une racine complexe.

Démonstration : Rudin, théorème 10.25p255 ■

Enfin, citons le théorème de l'image ouverte :

Théorème 12 (*Théorème de l'image ouverte*)

Si $f \in H(\Omega)$ lorsque Ω est un ouvert connexe, alors ou bien $f(\Omega)$ est un ouvert connexe, ou bien c'est un point.

Démonstration : Rudin, théorème 10.32p258 ■

2.2 En calcul différentiel

Proposition 8

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $f : U \to F$ différentiable sur un ouvert U de E.

1. *Si U est un ouvert convexe de E et si $\| Df(x) \|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq k$ pour tout $x \in U$ (où k est une constante positive), alors l'application f est k-lipschitzienne sur U, c'est à dire*

$$\| f(x) - f(y) \|_F \leq k \| x - y \|_E$$

2. *Si U est un ouvert connexe de E et si $Df(x) = 0$ pour tout $x \in U$ alors f est constante sur U.*

DÉVELOPPEMENT :

Théorème 13 (*Hadamard-Lévy*)

Soit f une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans lui même. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.*
2. *f est propre et, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la matrice jacobienne $Df(x)$ est inversible.*

Une application est dite propre si l'image réciproque de tout compact est compacte. Lorsque $\mathbb{R}^n$ est l'espace de départ et d'arrivée, cela revient à dire que $\| f(x) \|$ tend vers l'infini quand $\| x \|$ tend vers l'infini.

Démonstration : La preuve de ce résultat n'est pas simple, cependant si f est de classe C^2, il y a une preuve abordable que l'on présente ici. On suppose donc désormais que f est de classe C^2.

- 2) $\Rightarrow$ 1) : f^{-1} étant continue, elle envoie un compact sur un compact donc f est propre. Ensuite, comme $f^{-1} \circ f = Id$, on a $d(f^{-1})(f(x)) \circ df(x) = Id$, donc df est inversible en tout point.
- 1. Montrons que f est surjective.
     Pour cela on montre que $f(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert/fermé de $\mathbb{R}^n$ et donc que $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ par connexité de $\mathbb{R}^n$.
     Soit $y_0 \in f(\mathbb{R}^n)$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x_0) = y_0$. D'après le théorème d'inversion locale, f est un difféomorphisme d'un voisinage V de x_0 sur un voisinage W de y_0, alors $W = f(V) \subset f(\mathbb{R}^n)$, donc $f(\mathbb{R}^n$ est ouvert.
     Soit $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in f(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ telle que $y_k \to y \in \mathbb{R}^n$ quand $k \to \infty$. Posons $K = \{y_k, k \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$ qui est un compact de $\mathbb{R}^n$. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tel que $f(x_k) = y_k$ pour tout k, on a $x_k \in f^{-1}(K)$ qui est un compact puisque f est propre. Il existe donc une sous-suite convergente $x_{k_i} \to x$ dans $\mathbb{R}^n$ quand $i \to \infty$. Alors par continuité de f, $y_{k_i} = f(x_{k_i}) \to f(x) \in f(\mathbb{R}^n)$ d'où par unicité de la limite $y = f(x) \in f(\mathbb{R}^n)$, ce qui montre que $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé.
  2. Montrons que f est injective.
     C'est ici que l'on va utiliser l'hypothèse $f \in C^2$.
     Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. On considère la fonction $g(x) = f(x) - f(x_0)$. Elle vérifie les deux conditions de 2) à savoir g propre et le déterminant du jacobien est partout non nul. Il nous faut montrer que l'ensemble $S = \{x/g(x) = 0\}$ est réduit à un point $\{x_0\}$.

(a) S a un nombre fini d'éléments.
En effet, S est compact car g est propre ($S = g^{-1}(\{0\})$). Si S avait un nombre infini d'éléments (x_k), il y aurait dans S un point d'accumulation q. Comme $\mid Jac_q(g) \mid\neq 0$, il existe un voisinage V de q tel que g soit un difféomorphisme de V sur $h(V)$. En particulier, g est injective. Or, dans V, il y a au moins un $x_k \neq q$ et on a $g(x_k) = g(q) = 0$ ce qui contredit l'injectivité de g.

(b) Notons $S = \{p_1, ..., p_N\}$. On va montrer que $N = 1$.
On considère la fonction

$$F(x) = [dg(x)]^{-1} g(x)$$

Cette fonction est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ par hypothèse sur f. On introduit alors le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = -F(x(t)) \\ x(0) & = q \end{cases}$$

où $q \in \mathbb{R}^n$. On appelle alors trajectoire issue de q une solution du problème de Cauchy ci-dessus. Puisque $F \in C^1$, ce problème admet une solution maximale définie sur $[0, T^*[$. Soit x une telle solution.
Assertion 1 : $T^* = +\infty$.
En effet, pour $t \in [0, T^*($, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[g(x(t))] &= dg(x(t))\dot{x}(t) \\ &= -dg(x(t))(dg(x(t)))^{-1} g(x(t)) \\ &= -g(x(t)) \end{aligned}$$

Donc, $g(x(t)) = e^{-t} g(q) \leq g(q)$ car $t \geq 0$. Donc, $x(t) \in g^{-1}([-g(q), g(q)])$ qui est un compact car g est propre. Donc, T^* d'après le lemme de sortie de tout compact (ou théorème de majoration a priori).
Assertion 2 : Chaque p_i est un point asymptotiquement stable. Autrement dit, $F(p_i) = 0$ et $\exists \delta > 0$ tel que si x est une trajectoire issue de q telle que $\mid q - p_i \mid \delta$ alors $\lim_{t \to +\inf} x(t) = p_i$.
On a tout d'abord $F(p_i) = [dg(p_i)]^{-1} g(p_i) = 0$ car $g(p_i) = 0$.
Ensuite, g est un difféomorphisme d'une boule $B(p_i, \delta)$ sur un voisinage V de 0. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $B(0, \varepsilon) \subset V$, $y \in B(0, \varepsilon)$ et posons $q = g^{-1}(y) \in B(p_i, \delta)$. La fonction $x(t) = g^{-1}(e^{-t} q)$ est la trajectoire issue de q. En effet, $x(0) = g^{-1}(y) = q$ et

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= d(g^{-1})(e^{-t} y)(-e^{-t} y) \\ &= -d(g^{-1})(g(x(t)) g(x(t)) \\ &= -[dg(x(t))]^{-1} g(x(t)) \\ &= -F(x(t)) \end{aligned}$$

C'est donc par unicité la trajectoire issue de q. Mais alors, $\lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{t \to +\infty} g^{-1}(e^{-t} y) = g^{-1}(0) = p_i$.
Soit W_i l'ensemble des points $q \in \mathbb{R}^n$ tel que la trajectoire issue de q converge vers p_i quand $t \to +\infty$.
Assertion 3 : $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^N W_i$
Soit $q \in \mathbb{R}^n$ et $x(t)$ la trajectoire issue de q. On a vu dans l'assertion 1, que $x(t)$ reste dans un compact pour tout $t \geq 0$. Il existe donc $t_k \to +\infty$ telle que $x(t_k)$ converge vers l. Mais donc $g(l) = 0$ (car $g(x(t)) = e^{-t} g(q)$), donc $l = p_i$ pour un

certain i.
Fixons k_0 assez grand pour que $x(t_k) \in B(p_i, \delta)$ où δ est défini dans l'assertion 2. Alors la trajectoire $y(t)$ issue de $x(t_{k_0})$ converge vers p_i. Or, la fonction $z(t) = x(t + t_{k_0})$ est aussi trajectoire issue de $x(t_{k_0})$. Par unicité globale, on a $x(t + t_{k_0}) = y(t)$ et donc $x(t) \to p_i$ lorsque $t \to +\infty$.
Assertion 4 : Chaque W_i est ouvert.
Soit $q \in W_i$ et $x(t)$ la trajectoire issue de q. Il existe par définition de W_i, $T > 0$ tel que $\mid x(T) - p_i \mid \leq \delta/2$. Soit y la trajectoire issue de $q' \in \mathbb{R}^n$. Par continuité des solutions par rapport aux conditions initiales, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mid q - q' \mid \leq \varepsilon$ implique $\mid x(T) - y(T) \mid \leq \delta/2$. Alors

$$\mid y(T) - p_i \mid \leq \mid y(T) - x(T) \mid + \mid x(T) - p_i \mid \leq \delta$$

Il résulte de l'assertion 2 que $y(t)$ converge vers p_i lorsque $t \to +\infty$, *i.e* $q' \in W_i$ et $B(q, \varepsilon) \subset W_i$ donc W_i est ouvert.
Assertion 5 : $N = 1$
Chaque W_i est un ouvert non vide et $W_i \cap W_j = \emptyset$ si $i \neq j$ (si $N \geq 2$), et $\mathbb{R}^n = \cup_{i=1}^{N} W_i$.
Si $N \geq 2$, cela contredit la connexité de $\mathbb{R}^n$. Donc, $N = 1$! ■

On peut aussi parler, si on est à l'aise avec ça, des principes du maximum faibles et forts (voir Zuily-Queffelec p463-469).

2.3 En algèbre

Théorème 14 (*Surjectivité de l'exponentielle*)

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$, alors il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = exp(P(A))$. En particulier, l'application exponentielle de $M_n(\mathbb{C})$ dans $Gl_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Démonstration : On considère la sous-algèbre $\mathbb{C}[A]$ de $M_n(\mathbb{C})$ engendrée par A. C'est une algèbre commutative de dimension finie sur $\mathbb{C}$, isomorphe à $\mathbb{C}[X]/(\Pi)$ avec Π le polynôme minimal de A.
Comme $\mathbb{C}[A]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie, il est fermé dans $M_n(\mathbb{C})$ et donc pour $M \in \mathbb{C}[A]$, $exp(M)$ étant la limite d'une suite de polynômes en M (et donc en A), on $M \in \mathbb{C}[A]$.
De plus, on a également $exp(M)^{-1} \in \mathbb{C}[A]$ car $\exp(M)^{-1} = exp(-M)$.
Comme $\mathbb{C}[A]$ est une algèbre commutative, on en déduit que exp réalise un morphisme de groupes de $(\mathbb{C}[A], +)$ dans $(\mathbb{C}[A]^{\times}, .)$.
On va maintenant montrer que l'image $exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert fermé de $\mathbb{C}[A]^{\times}$. Pour $H \in \mathbb{C}[A]$, on a :

$$exp(0 + H) = I_n + H + o(H^2)$$

Donc, exp est différentiable en $0 \in \mathbb{C}[A]$ et sa différentielle en 0 est l'identité qui est inversible. On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale : il existe un voisinage ouvert V_0 de 0 et V un voisinage ouvert de l'identité, tels que exp réalise un difféomorphisme de V_0 dans V.

1. $exp(\mathbb{C}[A])$ **est ouvert dans** $(\mathbb{C}[A]^{\times}, .)$ **:** Soit $M \in \mathbb{C}[A]^{\times}$, comme $In \in V$, on a $M \in MV \subset exp(\mathbb{C}[A]) \subset \mathbb{C}[A]$. Par continuité de $(M, M') \mapsto MM'$, il vient que MV est un voisinage ouvert de M, inclus dans $exp(\mathbb{C}[A])$. Donc, $exp(\mathbb{C}[A])$ est un voisinage ouvert de chacun de ses points, donc c'est un ouvert.
2. $exp(\mathbb{C}[A])$ **est fermé dans** $(\mathbb{C}[A]^{\times}, .)$ **:** On peut écrire

$${}^{c}exp(\mathbb{C}[A]) = \bigcup_{M \notin exp(\mathbb{C}[A])} MV$$

Comme MV est ouvert pour tout M, ${}^c exp(\mathbb{C}[A])$ est ouvert, et le résultat est montré.

Il nous reste à montrer que $\mathbb{C}[A]^\times$ est connexe pour conclure.
Soient M et N dans $\mathbb{C}[A]^\times$. Soit $P(X) = det(XM + (1-N)X)$, on note $\mathbb{C}_{M,N} = \mathbb{C} \setminus \{\text{zéros de } P\}$.
L'ensemble des zéros de P étant en nombre fini, $\mathbb{C}_{M,N}$ est un ensemble connexe. L'image de $\mathbb{C}_{M,N}$ par l'application continue $z \mapsto zM + (1-z)N$ est donc une connexe de $\mathbb{C}[A]^\times$ contenant M et N, donc $\mathbb{C}[A]^\times$ est connexe.
En conclusion, $exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert-fermé de $\mathbb{C}[A]^\times$ qui est connexe, donc $exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times$. ■

Proposition 9

$GL_n(\mathbb{C})$ est connexe.

Démonstration : Mneimné-Testard, 1.5.1p17 ■

Corollaire 1

L'ensemble des projecteurs de rang p de $M_n(\mathbb{C})$ est connexe.

Démonstration : Mneimné-Testard, 1.5.2p17 ■

Proposition 10

Le groupe $GL_n^+(\mathbb{R})$ est connexe.

Démonstration : Mneimné-Testard, 2.6.1p33 ■

Corollaire 2

Le groupe $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes homéomorphes, qui sont $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$.

Démonstration : 2.6.2p34 ■