Leçon 205: Espaces complets: exemples et applications.

Adrien Fontaine

5 novembre 2012

Table des matières

1 Généralités

1.1 Définitions et exemples

Définition 1

Soit (E,d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de E. On dit que la suite (x_n) est de Cauchy, si et seulement si,

$$\forall\varepsilon>0, \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}/\forall p,q\geq n_\varepsilon, d(x_p,x_q)<\varepsilon$$

Remarque 1

- *Une suite convergente est de Cauchy.*
- *La réciproque est fausse. Par exemple, la suite (u_n) définie par récurrence par*

$$\begin{cases} u_0 & = 2 \\ u_{n+1} & = \frac{u_n}{2}+\frac{1}{u_n} \end{cases}$$

est de Cauchy dans $(\mathbb{Q},|\ .\ |)$ mais n'est pas convergente dans $\mathbb{Q}$ (sa limite dans $\mathbb{R}$ est $\sqrt{2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$).
- *Une suite de Cauchy est bornée.*
- *Attention, la notion de suite de Cauchy n'est pas topologique. On peut avoir une suite qui est de Cauchy pour une distance donnée, mais qui ne l'est pas pour une distance topologiquement équivalente. (voir Gourdon, exercice 2p22). Cependant, on a la proposition suivante :*

Proposition 1

Soient d et d' deux distances uniformément équivalentes de E. Une suite (x_n) est de Cauchy dans (E,d) si et seulement si c'est une suite de Cauchy dans (E,d').

Définition 2

On dit qu'un espace métrique (E,d) est complet si toute suite de Cauchy de E converge.

Exemple 1

- *Les espaces $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ sont complets.*
- *L'ensemble $\mathbb{Q}$ n'est pas complet comme le montre l'exemple de la remarque ci-dessus.*

1.2 Premières propriétés des espaces complets

Théorème 1 (*Complétion d'un espace métrique*)

Soit (E,d) un espace métrique. Alors, il existe un espace métrique complet $(\hat{E},\delta)$ et une injection isométrique $i/\to\hat{E}$ telle que $i(E)$ soit dense dans $\hat{E}$.

Démonstration : Gourdon, exercice 6p25 ■

Exemple 2

$\mathbb{R}$ est le complété de $\mathbb{Q}$.

Proposition 2

- *Toute partie complète d'un espace métrique est fermée.*
- *Toute partie fermée d'un espace complet est complète.*

Proposition 3

Soient $(E_1, d_1), ..., (E_n, d_n)$ des espaces métriques. L'espace métrique $E_1 \times ... \times E_n$ est complet (au sens de la distance produit), si et seulement si, pour tout i l'espace métrique (E_i, d_i) est complet.

Proposition 4

Soit (E, d) un espace complet et (F_n) une suite de fermés non vides de E, telle que $\lim_{n\to+\infty} \delta(F_n) = 0$ (où $\delta(F_n)$ désigne le diamètre de F_n). Alors il existe $x \in E$ tel que $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x\}$.

Démonstration : Gourdon, proposition 9p20 ■

Proposition 5 (*Critère de Cauchy pour les fonction*)

Soit (E, d) un espace métrique et (F, δ) un espace métrique complet. Soit une application $f : D \subset E \to F$, soient $A \subset E$ et $a \in \bar{A}$. La fonction f admet une limite lorsque x tend vers a selon A si et seulement si

$$(\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0, \forall(x, y) \in A^2),\ (d(a, x) < \alpha \text{ et } d(a, y) < \alpha) \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Proposition 6 (*Prolongement des applications uniformément continues*)

Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques et A une partie de E dense dans E. On suppose que (F, δ) est complet. Soit $f : (A, d) \to (F, \delta)$ une application uniformément continue. Alors, il existe une unique fonction $g : E \to F$ uniformément continue, telle que $g_{|A} = f$.

Démonstration : Gourdon, exercice 4p23. ■

Application :

1. construction de l'intégrale de Riemann à partir de l'ensemble des fonctions étagées. (trouver une référence ou c'est bien fait)
2. prolongement de la transformée de Fourier de $L^1 \cap L^2$ à L^2 (théorème de Plancherel, Rudin p225)

1.3 Théorème du point fixe

Théorème 2 (*Théorème du point fixe de Picard*)

Soit (E, d) un espace métrique complet, et une application $f : E \to E$ telle que

$$\exists k \in]0, 1[, \forall(x, y) \in E^2,\ d(f(x), f(y)) \geq kd(x, y)$$

(on dit alors que f est k-contractante). Alors f admet un unique point fixe, i.e *il existe un unique $x \in E$ tel que $f(x) = x$.*

Démonstration : Gourdon, théorème 1p21 ■

Attention, toutes les hypothèses sont nécessaires comme le montrent les contre-exemples suivants :

Exemple 3

1. *$E =]0,1[$ et $f(x) = x/2$: l'application est contractante de E dans lui même, mais sans point fixe (E n'est pas complet).*
2. *$E = [0,1]$ et $f(x) = \sqrt{x^2+1}$: l'espace est complet, f est contractante mais sans point fixe (f n'applique pas E dans lui même puisque $f(E) = [1, \sqrt{2}]$).*
3. *E un espace complet quelconque et $f(x) = x$: tout point est fixe (f n'est pas contractante).*

Conséquences :

– Développement :

Théorème 3 (*Théorème de Cauchy-Lipschitz global*)

L'espace $\mathbb{R}^m$ est muni d'une norme $\|.\|$. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ une application continue supposée globalement lipschitzienne en y au sens suivant : pour tout intrevalle compact $K \subset I$, il existe $k > 0$ tel que pour tous $t \in K$, $y, z \in \mathbb{R}^m$,

$$\|f(t,y) - f(t,z)\| \leq k\|y - z\|$$

Alors, le système différentiel

$$y' = f(t,y), y(t_0) = x$$

avec $t_0 \in I$ et $x \in \mathbb{R}^m$ donnés, admet une solution unique $t \mapsto y(t)$ qui est définie sur I tout entier.

En particulier, le résultat précédent s'applique notamment à tous les systèmes différentiels linéaires

$$y' = A(t)y + b(t)$$

où la matrice $A(t)$ et le vecteur $b(t)$ sont continus en t sur I.

Démonstration : On suppose dans un premier temps que I est compact :
On note $E = \{y : I \to \mathbb{R}^m, \text{continues}\}$.
Pour $y \in E$, $t \in I$, $F(y)(t) = x + \int_{t_0}^t f(x, y(s))ds$.
Si y est solution du système différentiel sur I, $t \mapsto y(t)$ est dérivable sur I (donc continue) et $y'(t) = f(t, y(t))$ pour $t \in I$ et $y(t_0) = x$. Comme f est continue, y' est aussi continue, d'où en intégrant

$$y(t) = \int_{t_0}^t f(s, y(s))ds$$

i.e $F(y) = y$.
Réciproquement, si y est continue sur I et $F(y) = y$ alors y est dérivable et

$$\begin{cases} y'(t) & = f(t, y(t)) \\ y(t_0) & = x \end{cases}$$

Le problème équivaut donc à la recherche d'un point fixe $y \in E$ pour l'application F.
Soit k la constante de Lipschitz associée à I et l la longueur de I. On munit E de la norme

$$\|y\|_k = \max_{t \in I} e^{-k|t-t_0|}\|y(t)\|$$

On a :
$$e^{-kl}\|y\|_\infty \le \|y\|_k \le \|y\|_\infty$$
L'espace E normé complet pour la norme $\|.\|_\infty$ (car I est compact) l'est donc également pour la norme $\|.\|_k$.
Comme f est continue, F applique E dans lui même . Pour appliquer le théorème de point fixe de Picard, il reste à montrer que F est contractante pour la norme $\|.\|_k$.
Pour $y, z \in E$, on a pour tout $t \in I$, $t \ge t_0$:
$$F(y)(t) - F(z)(t) = \int_{t_0}^{t} (f(s, y(s)) - f(s, z(s)))ds$$
D'où,
$$\begin{aligned}
&e^{-k(t-t_0)}\|F(y)(t) - F(z)(t)\| \\
&\le e^{-k(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} \|f(s, y(s)) - f(s, z(s))\|ds \\
&\le e^{-k(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} k\|y(s) - z(s)\|ds \\
&\le e^{-k(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} ke^{k(s-t_0)}\|y - z\|_k ds \\
&\le (1 - e^{-k|t-t_0|})\|y - z\|_k
\end{aligned}$$
Pour $t \in I$ et $t \le t_0$ on obtient de même, en prenant soin d'écrire $\int_t^{t_0}$ au lieu de $\int_{t_0}^t$ dans les majorations,
$$e^{k(t-t_0)}\|F(y)(t) - F(z)(t)\| \le (1 - e^{-k|t-t_0|})\|y - z\|_k$$
D'où, pour tout $t \in I$, on a :
$$e^{-k|t-t_0|}\|F(y)(t) - F(z)(t)\| \le (1 - e^{-k|t-t_0|})\|y - z\|_k$$
d'où en passant au max sur I,
$$\|F(y) - F(z)\|_k \le \underbrace{(1 - e^{-kl})}_{<1}\|y - z\|_k$$
Ainsi, F est contractante sur E muni de la norme $\|.\|_k$ et par le théorème du point fixe, le problème posé admet une solution unique.
Cas général :
Un intervalle quelconque I peut s'écrire $I = \cup_j I_j$ réunion d'une suite croissante d'intervalles compacts contenant tous le point t_0 donné ($]a, b[= \cup[a + 1/n, b - 1/n]$ qui contient le point t_0 pour n assez grand).
Soit y_j la solution (donnée par l'étude du premier cas) du problème sur I_j :
$$y_j'(t) = f(t, y_j(t)), t \in I_j, y_j(t_0) = x$$
Si y est la solution du problème sur I, la restriction de y à I_j coïncide nécessairement avec y_j par unicité sur I_j. Inversement, les y_j se raccordent : la fonction
$$y(t) = y_j(t) \text{ pour tout } j \text{ tel que } t \in I_j$$
est bien définie (encore l'unicité sur I_j !) et donne une solution sur I. ■

Théorème 4 (*Théorème d'inversion locale*)

Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$, de classe C^1 sur un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathbb{R}^n$. On suppose $f(0) = 0$ (pour simplifier les notations) et $Df(0)$ inversible. Alors il existe V et W, voisinages ouverts de 0 dans $\mathbb{R}^n$, tels que f soit un difféomorphisme de classe C^1 de V sur W.

– **Démonstration :** Rouvière, exercice 71p222 ■

Théorème 5 (*Théorème des fonctions implicites*)

Soient U un voisinage ouvert de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ et $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ une application de classe C^1 de U dans $\mathbb{R}^p$. On suppose $f(0,0) = 0$ pour simplifier les notations) et $D_y f(0,0)$ inversible. Alors, il existe $r > 0, s > 0$ et une unique application $\varphi : B_r \to B_s$ (boules ouvertes de centre 0, de rayons r et s dans les espaces normés $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ respectivement), tels que

$$(x \in B_r, y \in B_s \text{ et } f(x,y) = 0) \Leftrightarrow (x \in B_r \text{ et } y = \varphi(x))$$

De plus, φ est de classe C^1 sur B_r.

– **Démonstration :** Rouvière, exercice 86p259 ■

2 Espaces de Banach

2.1 Premières propriétés

Définition 3

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est normé s'il est muni d'une norme $\|.\|$. En notant, $d(x,y) = \|x-y\|$, on fait de E un espace métrique. On dit qu'un e.v.n est un espace de Banach s'il est complet.

Théorème 6

Si F est un espace de Banach, l'e.v.n $\mathcal{L}_c(E,F)$ est un espace de Banach.

Démonstration : Gourdon, théorème 2p48. ■

Application :

– Le dual topologique d'un e.v.n quelconque est un espace de Banach.

– **Proposition 7**

Soient E un espace de Banach, et $u \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $\|u\| < 1$. Alors, $Id - u$ est inversible et son inverse est $\sum_{n=0}^{+\infty} u^n \in \mathcal{L}_c(E)$.

Démonstration : Gourdon, proposition 2p49 ■

Si E est un espace de Banach, la proposition précédente montre que $\mathcal{GL}_c(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}_c(E)$.

Proposition 8

Un e.v.n est complet si et seulement si toute série $\sum u_n$ normalement convergente (i.e telle que $\sum \|u_n\|$ converge) est convergente.

Démonstration : Gourdon, exercice 3p52 ■

Théorème 7

Dans un e.v.n de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Démonstration : Gourdon, théorème 3p50 ■

Corollaire 1

Tout e.v.n de dimension finie est complet.

2.2 Propriété de Baire et applications

Le résultat suivant est un résultat classique qui joue un rôle essentiel dans les démonstrations des théorèmes "classiques" d'analyse fonctionnelle.

Théorème 8 (*Baire*)

Soit (E, d) un espace métrique complet. Alors :

1. *Si $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ouverts denses de E, $\cap_{n=1}^{\infty} O_n$ est encore dense dans E.*
   De façon duale,
2. *Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fermés d'intérieur vide de E, $\cup_{n=1}^{\infty} F_n$ est encore d'intérieur vide dans E.*

Démonstration : Breizis, lemme II.1p15 ■

Une première aplication du théorème de Baire est le théorème suivant :

Théorème 9 (*Banach-Steinhaus*)

Soient E et F deux espaces de Banach, et soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{L}(E, f)$; on suppose que

$$\forall x \in E, \sup_{i\in I} \|T_i(x)\| < \infty$$

Alors on a la conclusion,

$$\sup_{i\in I} \|T_i\| < \infty$$

Démonstration : Breizis, p17 ■

Indiquons un corollaire immédiat du théorème de Banach-Steinhaus :

Corollaire 2

Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}(E, F)^{\mathbb{N}}$ telle que pour chaque $x \in E$, $T_n x$ converge quand $n \to \infty$ vers une limite notée Tx. Alors on a :

$$\sup_n \|T_n\| < \infty$$

$$T \in \mathcal{L}(E, F)$$

$$\|T\| \leq \liminf_n \|T_n\|$$

Démonstration : Breizis, corollaire II.2p17 ■

Théorème 10 (*Théorème de l'application ouverte*)

Soient E et F deux espaces de Banach et soit $T : E \to F$ une surjection linéaire continue. Alors il existe $0 < M < \infty$ tel que $T(B_E(0,1)) \supset B_F(0, M^{-1})$, soit encore

$$\forall y \in F, \exists x \in E \text{ avec } y = Tx \text{ et } \|x\| \leq M\|y\|$$

En particulier,

$$T \text{ bijective } \Rightarrow T^{-1} \text{ continue et } \|T^{-1}\| \leq M$$

Démonstration : Breizis, théorème II.5p18 ■

Théorème 11 (*Théorème du graphe fermé*)

Soient E et F deux espaces de Banach. Soit T un opérateur linéaire de E dans F. On suppose que le graphe de T, $G(T)$, est fermé dans $E \times F$. alors, T est continu.

Démonstration : Breizis, théorème II.7p20 ■

Bien entendu, la réciproque est vraie puisque toute application continue (linéaire ou non linéaire) a un graphe fermé.
La partie suivante a sa place dans cette leçon mais il faut être bien à l'aise avec ça pour la tenter le jour de l'oral. Il faut notamment être capable de donner des applications du théorème de Hahn-Banach dans le cas non hilbertien.

2.3 Théorèmes de Hahn-Banach

Il s'agit d'un résultat essentiel d'analyse fonctionnelle.

Théorème 12 (*Théorème de Hahn-Banach, forme analytique*)

Soit $p : E \to \mathbb{R}$ une application vérifiant

$$\forall x \in E, \forall \lambda > 0, p(\lambda x) = \lambda p(x)$$
$$\forall x, y \in E, p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$

Soit d'autre part, $G \subset E$ un sous-espace vectoriel de E et soit $g : G \to \mathbb{R}$ une application linéaire telle que

$$\forall x \in G, g(x) \leq p(x)$$

Alors il existe une forme linéaire f définie sur E qui prolonge g i.e

$$\forall x \in G, g(x) = f(x)$$

et telle que

$$\forall x \in E, f(x) \leq p(x)$$

Démonstration : Breizis, théorème I.1p1 (utilise le lemme de Zorn) ■

Corollaire 3

Soit G un sous-espace vectoriel de E et soit $g : G \to \mathbb{R}$ une application linéaire et continue de norme

$$\|g\| = \sup_{x \in G \|x\| \leq 1} g(x)$$

Alors il existe $f \in E'$ qui prolonge g et telle que

$$\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$$

Corollaire 4

Pour tout $x_0 \in E$, il existe $f_0 \in E'$ tel que

$$\|f_0\| = \|x_0\| \text{ et } f_0(x_0) = \|x_0\|^2$$

Corollaire 5

Pour tout $x \in E$, on a :

$$\|x\| = \sup_{f \in E' \|f\| \leq 1} | f(x) | = \max_{f \in E' \|f\| \leq 1} | f(x) |$$

Donnons maintenant les formes géométriques du théorème de Hahn-Banach, elles concernent la séparation des ensembles convexes. Commençons par quelques préliminaires sur les hyperplans.

Définition 4

Un hyperplan (affine) est un ensemble de la forme

$$H = \{x \in E / f(x) = \alpha\}$$

où f est une forme linéaire (pas nécessairement continue) sur E, non identiquement nulle et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que H est l'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$.

Proposition 9

L'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$ est fermé si et seulement si f est continue.

Démonstration : Breizis, proposition I.5p4 ■

Définition 5

Soient $A \subset E$ et $B \subset E$. On dit que l'hyperplan H d'équation $[f = \alpha]$ sépare A et B au sens large si l'on a :

$$\forall x \in A, f(x) \leq \alpha \text{ et } \forall x \in B, f(x) \geq \alpha$$

Théorème 13 (*Théorème de Hahn-Banach, première forme géométrique*)

Soient $A \subset E$ et $B \subset E$ deux ensembles convexes, non vides, disjoints. On suppose que A est ouvert. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens large.

Démonstration : Breizis, théorème I.6p5 ■

Théorème 14 (*Théorème de Hahn-Banach, deuxième forme géométrique*)

Soient $A \subset E$ et $B \subset E$ deux ensembles convexes, non vides, disjoints. On suppose que A est fermé et que B est compact. Alors, il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict.

Démonstration : Breizis, théorème I.7p7 ■

3 Espaces de Hilbert

3.1 Définitions et premières propriétés

Les espaces de dimension finie sont très maniables mais beaucoup de leurs propriétés intéressantes ne sont plus vraies en dimension infinie. Les propriétés topologiques des espaces de Hilbert en font des espaces de dimension infinie très souples, comme nous allons le voir.

Définition 6

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $< u, v >$ et qui est complet pour la norme $< u, u >^{1/2}$.

Exemple 4

L'ensemble des suites complexes de carré sommables

$$l^2(\mathbb{N}) = \{x = (x_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \sum_{n=0}^{+\infty} \mid x_n \mid^2 < +\infty\}$$

muni du produit scalaire hermitien

$$\forall x, y \in l^2(\mathbb{N}), < x, y >= \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \bar{y_n}$$

forme un espace de Hilbert.

On rappelle qu'un produit scalaire vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $< x, y > \leq \|x\|.\|y\|$ où $\|.\|$ est la norme associée au produit scalaire. Par ailleurs, on a la proposition :

Proposition 10

Soit E un espace de Banach. On a équivalence entre :

1. $\forall x, y \in E, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2.\|x\|^2 + 2.\|y\|^2$ *(identité du parallélogramme).*
2. *E est isométrique à un espace de Hilbert.*

3.2 Projection sur un convexe fermé

Théorème 15 (*Projection sur un convexe fermé*)

Soit $K \subset H$ un convexe fermé non vide. Alors pour tout $f \in H$, il existe $u \in K$ unique tel que

$$\|f - u\| = \min_{v \in K} \|f - v\|$$

De plus, u est caractérisé par la propriété :

$$u \in K$$
$$\forall v \in K, < f - u, v - u > \leq 0$$

On note $u = P_K f$ = projection de f sur K.

Démonstration : Breizis, théorème V.2p79 ■

Proposition 11

Sous les hypothèses du théorème 15, on a :

$$\forall f_1, f_2 \in H, \|P_K f_1 - P_K f_2\| \leq \|f_1 - f_2\|$$

Corollaire 6

Soit $M \subset H$ un sous-espace vectoriel fermé. Soit $f \in H$. Alors $u = P_M f$ est caractérisé par

$$\begin{cases} u \in M \\ \forall v \in M, < f - u, v >= 0 \end{cases}$$

De plus P_M est un opérateur linéaire.

Application : définition de l'espérance conditionnelle.
Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace probabilisé et $\mathcal{F}$ une sous tribu de $\mathcal{A}$. Considérons le sous-espace vectoriel F de $L^2(X, \mathcal{A})$ des fonctions $\mathcal{F}$-mesurables. Notons ν la restriction de μ à la tribu $\mathcal{F}$. Si f est $\mathcal{F}$-mesurable et positive, alors

$$\int_X f d\mu = \int_X f d\nu$$

On montre que le sous-espace vectoriel F est fermé (en utilisant la caractérisation séquentielle[1]). On définit alors l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}$ d'un élément de $L^2(X, \mathcal{A})$ comme sa projection orthogonale sur F.

3.3 Dualité dans un espace de Hilbert

Théorème 16 (*Théorème de représentation de Riesz-Fréchet*)

Étant donné $\varphi \in H'$, il existe $f \in H$ unique tel que

$$\forall v \in H, \varphi(v) =< f, v >$$

De plus, on a $\|f\| = \|\varphi\|_{H'}$.

Démonstration : Breizis, théorème V.5p81 ■

Théorème 17

Soit $1 \leq p < +\infty$. L'application $g \mapsto L_g$ où $L_g(f) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ définit une isométrie linéaire de L^q sur $(L^p)'$.

1. pour les détails, voir Objectif-Agrégation application 3.23p100

Démonstration : On traite le cas $1 < p < 2$, la cas $p = 2$ étant conséquence immédiate du théorème de représentation de Riesz-Fréchet et de la complétude des espaces L^p.
La linéarité de L_g est immédiate par linéarité de l'intégrale. D'après l'inégalité de Hölder, $| L_g(f) | \|f\|_p\|g\|_q$ donc $L_g \in (L_p)'$ et $\|L_g\| \leq \|g\|_q$. Montrons qu'il y a en fait égalité. Soit $f = sgn(g) | g |^{q-1}$. On a :

$$\|f\|_p = (\int_0^1 | g |^{p(q-1)})^{1/p} = (\int_0^1 | g |^q)^{1/p}$$

car $p(q-1) = q$, étant donné que p et q sont conjugués. Et $L_g(f) = \int -0^1 | g |^q$. Donc,

$$\|L_g\| \geq \frac{| L_g(f)}{\|f\|_p} = (\int_0^1 | g |^q)^{1-1/p} = \|g\|_q$$

d'où, $\|L_g\| = \|g\|_q$. Donc, $g \mapsto L_g$ est une isométrie linéaire. Montrons qu'elle est surjective.
Soit $l \in (L^p)'$, comme on est sur un espace de mesure finie, l'inégalité de Hölder donne immédiatement $L^2 \subset L^p$ et la restriction φ de l à L^2 vérifie

$$| \varphi(f) |\leq \|l\|\|f\|_p \leq \|l\|\|f\|_2 \tag{1}$$

L^2 étant un espace de Hilbert, (1) entraine l'existence de $g \in L^2$ telle que

$$l(f) = \int fg, \forall f \in L^2 \tag{2}$$

Reste à montrer que $g \in L^p$ et que (2) a lieu pour tout $f \in L^p$.
On pose $\forall n \geq 1, f_n = sgn(g) | g |^{q-1} \not\Vdash_{|g|\leq n} \in L^\infty \subset L^2$. On a :

$$\begin{aligned}\int f_n g = \int | g |^q \not\Vdash_{|g|\leq n} &\leq \|l\|\|f_n\|_p \\ &= \|l\|(\int | g |^q \not\Vdash_{|g|\leq n})^{1/p}\end{aligned}$$

d'où, $(\int | g |^q \not\Vdash_{|g|\leq n})^{1/q} \leq \|l\|$. En utilisant le théorème de convergence monotone, et en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $g \in L^q$. Donc,

$$l(f) = L_g(f), \forall f \in L^2$$

Mais, L^2 est dense dans L^p ($C_0^\infty \subset L^2 \subset L^p$), donc par continuité de l et L_g sur L^p, on a $l = L_g$. ■

3.4 Théorèmes de Hahn-Banach

3.4.1 Forme géométrique

Comme on l'a vu, le forme géométrique du théorème de Hahn-Banach, exprime que l'on peut "séparer les convexes disjoints" sous certaines hypothèses. Dans un espace de Hilbert, la preuve est bien plus simple. Nous montrons ici que l'on peut séparer strictement un point d'un convexe fermé auquel il n'appartient pas, puis nous en déduisons que l'on peut séparer strictement deux convexes disjoints dont l'un est compact et l'autre est fermé.

Démonstration : Objectif Agrégation, application 3.16p97 ■

3.4.2 Forme analytique

Le théorème de Hahn-Banach analytique établit que l'on peut "prolonger une forme linéaire continue en conservant sa norme". Dans un espace de Hilbert, on peut en fait, construire explicitement un prolongement.

Démonstration : Objectif Agrégation, application 3.36p106 ■

3.5 Théorèmes de Stampacchia et Lax-Milgram

Théorème 18 (*Théorème de Stampacchia*)

Soit $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire. On suppose que a est continue, i.e *:*

$$\exists C/\forall u, v \in H, \mid a(u,v) \mid \leq C\|u\|\|v\|$$

et coercive, i.e

$$\exists \alpha > 0, \forall v \in H, a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2$$

Soit K un convexe, fermé et non vide.
Étant $\varphi \in H'$, il existe $u \in K$ unique tel que

$$\forall v \in K, a(u, v-u) \geq \varphi(v-u)$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$u \in K$$
$$\frac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u) = \min_{v\in K}\{\frac{1}{2}a(v,v) - \varphi(v)\}$$

Démonstration : Soit $\varphi \in H'$, d'après le théorème de représentation de Riesz-Fréchet, il existe un unique $f \in H$ tel que :

$$\forall v \in H, \varphi(v) =< f, v >$$

D'autre part, pour tout $u \in H$ fixé, l'application $v \mapsto a(au, v)$ est une forme linéaire continue sur H, donc grâce au théorème de représentation de Riesz-Fréchet, il existe un élément de H, noté Au, tel que $a(u,v) =< Au, v >, \forall v \in H$.
En utilisant l'unicité de Au, on montre facilement que A est un opérateur linéaire de H dans H.
De plus,

$$\begin{cases} < Au, u > & = a(u,u) \geq \alpha\|u\|^2 \\ \|Au\|^2 & =< Au, Au >= a(u, Au) \leq C\|u\|\|Au\| \end{cases}$$

donc,

$$\begin{cases} \|Au\| & \leq C\|u\| \\ < Au, u > & \geq \alpha\|u\|^2 \end{cases}$$

Ramenons désormais l'inégalité de l'énoncé du théorème de Stampacchia à un problème de point fixe.
On a d'après le travail préliminaire qui vient d'être fait :

$$\begin{aligned} &\exists! u \in K, \forall v \in K, a(u, v-u) \geq \varphi(v-u) \\ &\Leftrightarrow \exists! u \in K, \forall v \in K, < Au, v-u >\geq< f, v-u > \\ &\Leftrightarrow \exists! u \in K, \forall v \in K, \forall \rho > 0, < \rho f - \rho Au + u - u, v - u >\leq 0 \\ &\Leftrightarrow \exists! u \in K, \forall v \in K, \forall \rho > 0, u = p_K(\rho f - \rho Au + u \end{aligned}$$

Pour tout $v \in K$, on pose $S(v) = p_K(\rho f - \rho Av + v)$. On s'est donc ramené à un problème de point fixe. Montrons que si $\rho > 0$ est convenablement choisi, alors S est une contraction stricte, i.e il existe $k < 1$ tel que

$$\forall v_1, v_2 \in K, \|S(v_1) - S(v_2)\| \leq k\|v_1 - v_2\|$$

La projection sur un convexe fermé est 1-Lipschitzienne donc,

$$\|S(v_1) - S(v_2)\| \leq \|(v_1 - v_2) - \rho(A(v_1 - v_2))\|$$

et donc,

$$\begin{aligned}\|S(v_1) - S(v_2)\|^2 &\leq \|v_1 - v_2\|^2 - 2\rho < A(v_1 - v_2), v_1 - v_2 > +\rho^2\|A(v_1 - v_2)\|^2 \\ &\leq (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2)\|v_1 - v_2\|^2\end{aligned}$$

Si on prend alors $\rho = \frac{\alpha}{C^2}$ par exemple, on a :

$$\|S(v_1) - S(v_2)\|^2 \leq \underbrace{(1 - \frac{\alpha^2}{C^2})}_{<1} \|v_1 - v_2\|^2$$

De plus, K étant fermé dans H complet, K est complet et S va de K dans lui même, donc S admet un unique point fixe. D'où le résultat.
Supposons maintenant que $a(u, v)$ est symétrique. Alors $a(u, v)$ définit un produit scalaire sur H (c'est défini positif par coercitivité de a) et la norme associée $a(u, u)^{1/2}$ est équivalente à la norme $\|.\|$ issue du produit scalaire usuel ($\alpha\|u\|^2 \leq a(u, u) \leq C\|u\|^2$). Donc, H est aussi un espace de Hilbert pour ce produit scalaire. Appliquant le théorème de représentation de Riesz-Fréchet, on obtient $g \in H$ tel que

$$\forall v \in H, \varphi(v) = a(g, v)$$

L'inégalité du théorème de Stampacchia devient alors

$$\forall v \in K, a(u, v - u) \geq a(g, v - u)$$

soit

$$\forall v \in K, a(g - u, v - u) \leq 0 \tag{3}$$

i.e $u = p_K(g)$ où p_K est la projection au sens du produit scalaire défini par a. D'après le théorème de projection sur un convexe fermé, 3 équivaut donc à trouver $u \in K$ tel que

$$a(g - u, v - u)^{1/2} = \min_{v \in K} a(g - v, g - v)^{1/2}$$

Ceci revient à minimiser sur K, $a(g - v, g - v)$, ou encore $a(v, v) - 2a(g, v)$, ou encore

$$\frac{1}{2}a(v, v) - \varphi(v)$$

■

Corollaire 7 (*Lax-Milgram*)

Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire continue et coercive. Alors pour tout $\varphi \in H'$, il existe $u \in H$ unique tel que

$$\forall v \in H, a(u, v) = \varphi(v)$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$u \in H \text{ et } \frac{1}{2}a(u, u) - \varphi(u) = \min_{v \in H}\{\frac{1}{2}a(v, v) - \varphi(v)\}$$

Le théorème de Lax-Milgram est un outil fondamental dans l'étude de certaines équations aux dérivées partielles (souvent utilisé dans sa version symétrique). Le théorème de Stampacchia généralise le théorème de Lax-Milgram. Il peut aussi s'obtenir directement à partir de la théorie hilbertienne. [2]

2. il est important de savoir motiver le théorème de Stampacchia, et pas seulement en disant qu'on peut en déduire le théorème de Lax-Milgram. A ce propos, voir Breizis pages 136-137

Applications des théorèmes de Stampacchia et Lax-Milgram

Soit $I =]0,1[$. On rappelle la définition de l'espace de Sobolev (c'est un espace de Hilbert) :

Définition 7

$$H_0^1(I) = \{u \in L^2(I) / \exists g \in L^2(I) \text{ tel que } \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi, \forall \varphi \in C_0^\infty(I) \text{ et } u(0) = u(1) = 0\}$$

$$[H^1(I) = \{u \in L^2(I) / \exists g \in L^2(I) \text{ tel que } \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi, \forall \varphi \in C_0^\infty(I)\}$$

Soit à résoudre le problème

$$\begin{cases} -u'' + u & = f \text{ sur } I =]0,1[\\ u(0) = u(1) & = 0 \end{cases} \tag{4}$$

où f est une fonction donnée (par exemple dans $C(\bar{I})$ ou $f \in L^2$). La condition aux limites $u(0) = u(1) = 0$ s'appelle la condition de Dirichlet homogène.

Définition 8

Une solution classique de (4) est une fonction $u \in C^2(\bar{I})$ vérifiant (4) au sens usuel. Une solution faible de (4) est une fonction $u \in H_0^1(I)$ qui vérifie

$$\int_0^1 u'\varphi' + \int_0^1 u\varphi = \int_0^1 f\varphi, \forall \varphi \in H_0^1(I) \tag{5}$$

Remarque 2

Toute solution classique est une solution au sens faible (vérification facile en multipliant par φ et en intégrant par parties).

Pour établir l'existence de solution au problème (4), on montre l'existence d'une solution au sens faible, puis on montre que cette solution faible est de classe C^2 et qu'une solution faible de classe C^2 est une solution classique. Pour montrer l'existence d'une solution faible, on utilise le théorème de Lax-Milgram :

Proposition 12

Pour tout $f \in C([0,1])$, il existe $u \in C^1(\bar{I})$ unique solution de (5).

Démonstration : On applique le théorème de Lax-Milgram dans l'espace de Hilbert $H = H_0^1(I)$ avec la forme bilinéaire

$$a(u,v) = \int u'v' + \int uv$$

et la forme linéaire $\varphi(v) = \int fv$. ■

Un problème se pose alors, lorsque les conditions de Dirichlet ne sont plus homogène :

$$\begin{cases} -u'' + u = f \text{ sur } I =]0,1[\\ u(0) = \alpha, u(1) = \beta \end{cases} \tag{6}$$

En effet, on ne peut plus se placer dans H_0^1. C'est ici que l'on utilise le théorème de Stampacchia plus général que le théorème de Lax-Milgram.

Proposition 13

Étant donné $f \in L^2(I)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, il existe $u \in H^1(I)$ unique vérifiant (6).

Démonstration : Dans l'espace H^1, on introduit le convexe fermé

$$K = \{v \in H^1(I)/v(0) = \alpha, v(1) = \beta\}$$

Si u est une solution classique de (6), on a :

$$\forall v \in K, \int_I u'(v-u)' + \int_I u(v-u) = \int_I f(v-u)$$

Donc, en particulier on a

$$\forall vinK, \int_I u'(v-u)' + \int_I u(v-u) \geq \int_I f(v-u) \tag{7}$$

On utilise alors le théorème de Stampacchia : il existe $u \in K$ unique solution de (7). ■