Leçon 214: Théorème d'inversion locale. Théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.

Adrien Fontaine

26 avril 2013

Table des matières

1 Résultats généraux

1.1 Les théorèmes

Théorème 1 (***d'inversion locale***)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, a un point de U, et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1. On suppose que la matrice jacobienne $Df(a)$ est inversible, i.e $det(Df(a)) \neq 0$.
Il existe alors un voisinage ouvert V de a (inclus dans U), et un voisinage W de $b = f(a)$ tel que f soit un C^1 difféomorphisme de V dans W.

Rouvière p188

Reproduire le dessin du Rouvière dans le plan, ou bien au tableau lors de la présentation du plan.
Le théorème d'inversion locale revient à résoudre $y = f(x)$ en $x = f^{-1}(y)$. En effet, on a l'équivalence :

$$(x \in V \text{ et } y = f(x)) \Leftrightarrow (y \in W \text{ et } x = f^{\Leftrightarrow 1}(y)$$

L'équation $f(x) = y$ a une unique solution dans V, mais *attention*, elle peut en avoir d'autres en dehors de V !

Il faut avoir une idée de la preuve du théorème d'inversion locale, à partir du théorème de point fixe de Picard (même si on ne connaît pas tous les détails car c'est assez technique et pénible).

Remarque 1

On peut remplacer dans les hypothèses, f de classe C^1 par f de classe C^k. On obtient alors un difféomorphisme de classe C^k.

Exemple 1

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \mapsto & (x^2 - y^2, 2xy) \end{array}$$

Rouvière p204

est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Contre-exemple 1

$f(x) = x + x^2 \sin(\frac{\pi}{x})$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(0) \neq 0$ mais f n'est inversible sur aucun voisinage de 0.

Rouvière p204

Théorème 2 (***des Fonctions Implicites***)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, (a,b) un point de U, et $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ une application de classe C^1 de U dans $\mathbb{R}^p$. On suppose que $f(a,b) = 0$ et que la matrice jacobienne $D_y f(a,b)$, formée des dérivées partielles par rapport à y, est inversible, i.e $det(D_y f(a,b)) \neq 0$.
Alors, l'équation $f(x,y) = 0$ peut être résolue localement par rapport aux variables y : il existe un voisinage ouvert V de a dans $\mathbb{R}^n$ et W un voisinage ouvert de b dans $\mathbb{R}^p$, avec $V \times W \subset U$, et un application $\varphi : V \to W$ de classe C^1 telle que :

$$(x \in V, y \in W \text{ et } f(x,y) = 0) \Leftrightarrow (x \in V \text{ et } y = \varphi(x))$$

Rouvière p192

Pareil que pour le théorème d'inversion locale, reproduire le dessin du Rouvière soit au tableau soit sur le plan.
La signification du théorème est que la courbe définie implicitement par $f(x,y) = 0$ peut être vue, au moins localement, comme le graphe d'une fonction φ.
Le théorème des fonctions implicites peut s'obtenir de deux façons : soit à partir du théorème d'inversion locale (en considérant la fonction $g(x,y) = (x, f(x,y))$ et en vérifiant que g satisfait aux hypothèses du TIL, soit directement à partir du théorème de point fixe de Picard en considérant la suite des itérées :

$$y_{n+1} = y_n - D_y f(a,b)^{-1} f(x, y_n) \text{ et } y_0 = b$$

Exemple 2

L'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$ définit deux fonctions implicites correspondant aux demi-cercles supérieurs et inférieurs : Rouvière p193

$$V_1 =]-1,1[, W_1 =]0,+\infty[,\ y = \varphi_1(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$V_2 =]-1,1[, W_2 =]-\infty,0[\ y = \varphi_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$$

Remarque 2

- *Les théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale sont équivalents.*
- *Comme pour le théorème d'inversion locale, si dans les hypothèses, f est de classe C^k, alors φ est également de classe C^k.*

Il est important de savoir calculer la différentielle de la fonction implicite. Elle intervient par exemple dans le théorème des extrema liés. On peut d'ailleurs remarquer que la preuve du Gourdon de ce théorème (p327) ne détaille pas le calcul de cette différentielle.

1.2 Résultats liés

Théorème 3 (*d'inversion globale*)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. On suppose que f est injective sur U et que, pour tout $x \in U$, la matrice jacobienne $Df(x)$ est inversible, i.e *$det(Df(x) \neq 0$.*
Alors, $f(U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f est un C^1-difféomorphisme de U sur $f(U)$. Rouvière p190

Cet énoncé global n'est pas aussi satisfaisant qu'il y parait : en pratique on est souvent amené, pour vérifier l'injectivité de f, ou pour expliciter l'image $f(U)$, à faire des calculs qui reviennent à expliciter f^{-1}, ce qui fait bien sûr perdre tout son intérêt au théorème.

Contre-exemple 2

- *$f(x,y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y))$ vérifie $Df(x,y)$ inversible pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et pourtant f n'est pas injective* Gourdon p324
- *$f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ également* Rouvière p204

On peut remarquer que les deux contre-exemples sont construits exactement sur le même modèle : on considère une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de dérivée non nulle (e^z dans le premier cas, z^2 dans le deuxième), et qui n'est clairement pas injective.

Application : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 telle que l'application φ définie par $\varphi = f - Id$ soit k-contractante. Alors, f est un C^1-difféomorphisme global. Gourdon p329

Théorème 4 (*Hadamard-Lévy*)

Soit f une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans lui même. Les propriétés suivantes sont équivalentes : Zuily-Queffelec p400

1. *f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.*
2. *f est propre et, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la matrice jacobienne $Df(x)$ est inversible.*

DÉVELOPPEMENT : Preuve dans le cas f de classe C^2.

Théorème 5 (*d'inversion globale holomorphe*)

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe injective sur U. Alors, f est un difféomorphisme holomorphe de U sur $f(U)$. Rouvière p191 pour l'énoncé et Rudin p259 pour la démonstration

Il est remarquable que l'on ait ici besoin d'aucune hypothèse sur la dérivée de f : la seule injectivité de f suffit à empêcher f' de s'annuler !.

Théorème 6 (*Changement de coordonnées*)

Soient $f_1, ..., f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 au voisinage de $a \in \mathbb{N}^n$. Les relations Rouvière p190

$$u_1 = f_1(x_1, ..., x_n), ..., u_n = f_n(x_1, ..., x_n)$$

définissent un changement de coordonnées sur un voisinage de a, si et seulement si, le déterminant jacobien $det(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{1 \leq i,j \leq n})$ n'est pas nul, c'est à dire si les différentielles $Df_1(a)$,...,$Df_n(a)$ sont des formes linéaires indépendantes sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 3

$$r = \sqrt{x^2 = y^2} \text{ et } \theta = \arctan(\frac{y}{x})$$

donne le passage en coordonnées polaires sur le demi-plan ouvert de $x > 0$ de $\mathbb{R}^2$.

Application : Intégrale de Gauss

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{2\pi}$$

Théorème 7 (*du rang constant*)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application de classe C^1. On suppose que le rang de la matrice jacobienne $Df(x)$ est constant sur U, égal à r. Alors, il existe un voisinage ouvert V de a et un C^1 difféomorphisme $\varphi : V \to \varphi(V)$, un voisinage ouvert W de $f(a)$ et un C^1-difféomorphisme Rouvière p231

$\psi : W \to \psi(W)$ tel que :

$\forall(x_1, ..., x_r, x_{r+1}, ..., x_n) \in \varphi(U), \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, ..., x_r, x_{r+1}, ..., x_n) = (x_1, ..., x_r, 0, ...0)$

À changement de coordonnées près, la seule application C^1 de rang constant r est donc l'application linéaire A de matrice

$$A = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2 Applications

2.1 Le théorème des extrema liés

Développement :

Théorème 8 (*Extrema liés*)

Soient $f, g_1, ..., g_r : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe C^1, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On désigne par Γ l'ensemble $\{x \in U / g_1(x) = ... = g_r(x) = 0\} := \Gamma$. Si $f_{|\Gamma}$ (restriction de f à Γ) admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$ et si les formes linéaires $dg_{1,a}, ..., dg_{r,a}$ sont linéairement indépendantes, alors il existe des réels $\lambda_1, ..., \lambda_r$ (appelés multiplicateurs de Lagrange) tels que Gourdon p317 énoncé, p327 preuve

$$df_a = \lambda_1 dg_{1,a} + ... + \lambda_r dg_{r,a}$$

Applications :

- Propriété tangentielle des ellipses Rouvière p374
- Inégalité arithmético-géométrique Gourdon p319
- Inégalité de Hadamard Rouvière p409