Leçon 223: Convergence des suites numériques. Exemples et applications.

Adrien Fontaine

7 décembre 2012

Table des matières

Dans toute la leçon, (u_n), (v_n) et (w_n) désignent des suites réelles.

1 Généralités

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1

On dit que (u_n) est convergente si il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - l| < \varepsilon$$

Dans ce cas, l est unique et on note $u_n \to l$.

Définition 2

–
$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow \exists w_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ tq \ \begin{cases} \forall n \geq 0, u_n = w_n v_n \\ w_n \to 1 \end{cases}$$

–
$$u_n = o(v_n) \Leftrightarrow \exists w_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ tq \ \begin{cases} \forall n \geq 0, u_n = w_n v_n \\ w_n \to 0 \end{cases}$$

Proposition 1

- *Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$, $u_n \to u$ et $v_n \to v$, alors $u \leq v$.*
- *Si (u_n) est monotone et bornée alors (u_n) converge.*

Démonstration : Gourdon, page 192 ■

Corollaire 1 (*Théorème des gendarmes*)

Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et si $u_n \to l$ et $w_n \to l$, alors (v_n) converge et $v_n \to l$.

Démonstration : Gourdon, page 192 ■

1.2 Suites adjacentes

Définition 3

(u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante, et si

$$\lim_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$$

Dans ce cas, u_n et v_n sont convergentes et convergent vers la même limite.

Exemple 1 (*Suite Arithmético-géométrique*)

Les suites (u_n) et (v_n) définies par $0 < u_0 < v_0$, $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ sont adjacentes.

Démonstration : Gourdon, exercice 6p198 ■

Application : Critère des séries alternées

Théorème 1

Soit (u_n) une suite à termes positifs, décroissante, tendant vers 0. Alors la série alternée $\sum(-1)^n a_n$ converge, et les reste

$$\forall n \in \mathbb{N}, R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k \text{ vérifient } |R_n| \leq a_{n+1}$$

Démonstration : Gourdon, théorème 6p206 ■

1.3 Valeurs d'adhérence

Définition 4

On dit que $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ est valeurs d'adhérence de (u_n) si

$$\forall \varepsilon > 0, \forall p \in \mathbb{N}, \exists n \geq p |u_n - a| < \varepsilon$$

Proposition 2

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *a est une valeur d'adhérence de (u_n)*
2. *Il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $u_{\varphi(n)} \to a$.*
3. *$a \in \cap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{u_k, k \geq n\}}$*

Démonstration : Gourdon, proposition 1p19 ■

Corollaire 2

Si (u_n) possède une unique valeur d'adhérence $a \in \bar{\mathbb{R}}$, alors $u_n \to a$.

Démonstration : Gourdon, p191 ■

Exemple 2

– *Pour $(u_n) = (-1)^n$, l'ensemble des valeurs d'adhérence est $\{-1, 1\}$.*
– *Pour $(u_n) = \sin(n)$, l'ensemble des valeurs d'adhérence est $[-1, 1]$.*

Théorème 2 (*Bolzano-Weierstrass*)

De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite qui converge (i.e Toute suite bornée a une valeur d'adhérence finie).

Démonstration : Gourdon, page 192 ■

1.4 Suites de Cauchy

Définition 5

Une suite (u_n) est dite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, |u_p - u_q| < \varepsilon$$

Application : $\mathbb{R}$ se construit grâce aux suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$, quotienté par la relation d'équivalence $(u_n) \sim (v_n) \Leftrightarrow u_n - v_n \to 0$.

Proposition 3

(u_n) est de Cauchy $\Leftrightarrow$ (u_n) est convergente.

Application : Toute série absolument convergente est convergente.

Démonstration : Gourdon, exercice 3p52 ■

1.5 Liminf et limsup

Définition 6

On note

$$\limsup_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} u_k = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} u_k \in \bar{\mathbb{R}}$$

et

$$\liminf_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n} u_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} u_k \in \bar{\mathbb{R}}$$

Zuily-Queffelec, p2

Proposition 4

Si $\liminf u_n = \limsup u_n = a$ alors $u_n \to a$.

Démonstration : Zuily-Queffelec, théorème II.1p2 ■

Application : Suites sous additives
Soit (u_n) une suite de réels positifs telle que :

$$\forall n, p \geq 0, u_{n+p} \leq u_n + u_p$$

Alors $\frac{u_n}{n}$ tend vers une limite a.

Démonstration : Zuily-Queffelec, exemple III.1p5 ■

Conséquence : Si T est un opérateur borné dans un Banach, alors $u_n = \|T^n\|^{1/n}$ converge.

2 Étude des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

2.1 Suites récurrentes usuelles

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ telle que $f(I) \subset I$. Considérons une suite (u_n) vérifiant

$$u_0 \in I \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

Proposition 5

- *Si f est croissante, la suite (u_n) est monotone et son sens de monotonie est donnée par le signe de $u_1 - u_0$.*
- *Si f est décroissante, la fonction $f \circ f$ est croissante. On en déduit que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, et leur sens de monotonie est opposé.*

Démonstration : Gourdon, p192-193 ■

Proposition 6 (*Suites arithmétique et géométrique*)

1. *Si (u_n) vérifie une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = u_n + a$, alors $u_n = u_0 + na$ et on dit que que (u_n) est une suite arithmétique de raison a.*
2. *Si (u_n) vérifie une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = qu_n$, alors $u_n = q^n u_0$ et on dit que (u_n) est une suite géométrique de raison q. Si $|q| > 1$, la suite diverge. Si $|q| < 1$, elle converge et a pour limite 0.*

Démonstration : Gourdon, p193 ■

Définition 7

On dit qu'une suite (u_n) vérifie une récurrence homographique si elle vérifie une relation de récurrence du type :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = h(u_n) \text{ avec } h(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \text{ et } ad - bc \neq 0$$

Proposition 7

Soit (u_n) une suite vérifiant une relation de récurrence homographique. On considère l'équation :

$$h(x) = x \Leftrightarrow cx^2 - (a-d)x - b = 0$$

- *Si cette équation admet deux racines distinctes α, β, alors on a :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = k^n \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta} \text{ où } k = \frac{a - \alpha c}{a - \beta c}$$

- *Si elle admet une racine double α, alors*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{u_n - \alpha} = \frac{1}{u_0 - \alpha} + kn \text{ où } k = \frac{c}{a - \alpha c}$$

Démonstration : Gourdon, proposition 2p193 ■

Remarque 1

Ces formules permettent de décider s'il existe un entier n qui annule le dénominateur de h, auquel cas les termes ultérieurs de la suite ne sont pas définis.

2.2 Application : Résolution d'équation $F(x) = 0$

Remarque 2

Si $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue et si $u_n \to l$ alors $f(l) = l$. La réciproque est cependant fausse (prendre par exemple $f(x) = x^2$ et $u_0 > 1$).
Par ailleurs, résoudre une équation $f(x) = 0$ revient à chercher le point fixe de l'application $F(x) = x - f(x)$. C'est ce qui motive le théorème suivant.

Théorème 3 (*Théorème de point fixe de Picard*)

Soit I un intervalle fermé et $f : I \to I$ contractante. Alors pour tout $u_0 \in I$, la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l'unique point fixe de f.

Démonstration : Gourdon, théorème 1p21 ■

Développement : Méthode de Newton :

Théorème 4 (*Méthode de Newton*)

Soit $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2, on suppose $c < d$ et $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [c, d]$. On note a l'unique l'unique solution de $f(x) = 0$ sur $[c, d]$. Considérons la suite récurrente :

$$u_{n+1} = F(u_n), n \geq 0 \text{ avec } F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

1. *Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que $|u_{n+1} - a| \leq C|u_n - a|^2$ (convergence d'ordre 2)*
2. *Si de plus $\forall, x \in [c, d], f''(x) > 0$, alors*

$$u_{n+1} - a \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(u_n - a)^2 \text{ si } u_0 > a$$

2.3 Suites équiréparties

Définition 8

Soit (u_n) une suite de points de $[0, 1]$. Pour $0 \leq a < b \leq 1$, on pose

$$S_n(a, b) = Card(\{k \in \{1, ..., n\}, u_k \in [a, b]\})$$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie si $\frac{S_n(a,b)}{n}$ tend vers $b - a$ pour $0 \leq a < b \leq 1$.

Développement :

Théorème 5 (*Critère de Weyl*)

On a équivalence entre :

1. *(u_n) est équirépartie.*
2. *Pour toute fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) = \int_0^1 f(t)dt$$

3. *Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi p u_k} = 0$$

Exemple 3

Si $x_0 \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, alors $(x_0 + n\theta - \lfloor x_0 + n\theta \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie.

Démonstration : Oraux X-ENS, Analyse 2, exercice 1.29p50 ■

3 Comportement asymptotique

3.1 Sommation des équivalents

Théorème 6

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs, telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ lorsque $n \to +\infty$. Alors :

1. *Si $\sum u_n$ converge, $\sum v_n$ converge, et les reste vérifient*

$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$$

2. *Si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ diverge, et les sommes partielles vérifient*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k$$

Démonstration : Gourdon, théorème 5p202 ■

Application : Calcul du développement limité de la série harmonique $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} = o(\frac{1}{n^2})$$

3.2 Formule de Stirling

[1]

Lemme 1

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (u_{n+1} - u_n) \text{ converge } \Leftrightarrow (u_n) \text{ converge}$$

Application : Formule de Stirling

$$n! = (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}(1 + \frac{1}{12n} + o(\frac{1}{n}))$$

1. Cette partie est optionnelle... La démonstration de la formule de Stirling peut faire l'objet d'un développement si on aime les calculs...

Démonstration : Gourdon, exercice 3p211 ■

3.3 Moyenne de Césaro et sommes de Riemann

Proposition 8

Si (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors sa moyenne de Césaro $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$ converge aussi vers l.

Démonstration : Gourdon, exercice 2p195 ■

Remarque 3

La réciproque est fausse :

$$u_n = (-1)^n \text{ et } S_n \to 0$$

Théorème 7 (*Sommes de Riemann*)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue par morceaux. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a + i\frac{b-a}{n}) = \int_a^b f(x)dx$$

Démonstration : Gourdon, théorème 7p124 ■

Application :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} = log(2)$$

3.4 Méthode d'accélération de convergence d'Aïtken

[2]

Proposition 9

Si $(u_n) \to a \in \mathbb{R}$, si il existe $k \in \mathbb{R}$ $|k| < 1$ et si il existe $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\varepsilon_n \to 0$, et pour tout $n \geq 0$,

$$(u_{n+1} - a) = (k + \varepsilon_n)(u_n - a)$$

et si $u_n \neq a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, il est possible de construire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - \frac{(u_{n+1} - u_n)^2}{(u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n}$$

Nous avons alors

- $v_n \to a$
- $\frac{v_n - a}{u_n - a} \to 0$ *(i.e v_n converge plus vite que u_n vers a*

Démonstration : Chambert-Loir, Fermigier, Analyse 2, exercice 23-4p208 ■

2. pas vraiment indispensable mais ça rentre vraiment bien dans cette leçon...

3.5 Un théorème Taubérien

Théorème 8

Soit (a_n) une suite décroissante de réels positifs, $S_n = a_0 + ... + a_n$, $\alpha \in]0,1[$ et $c > 0$. On a équivalence entre :

1. $a_n \underset{+\infty}{\sim} cn^{-\alpha}$
2. $S_n \underset{+\infty}{\sim} c\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

Démonstration : Zuily-Queffelec, exemple III.2p6 ■

[3]

3. On pourrait aussi rajouter le théorème d'Abel angulaire, et le théorème Taubérien faible (tous les deux dans Gourdon, Analyse)