Leçon 239: Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Adrien Fontaine

23 décembre 2012

Table des matières

1 Régularité **3**
1.1 Continuité . . . 3
1.2 Dérivabilité . . . 4
1.3 Holomorphie . . . 5

2 Convolution **6**
2.1 Définitions et premières propriétés . . . 6
2.2 Suites régularisantes . . . 7

3 Transformée de Fourier **9**
3.1 Dans L^1 et dans L^2 . . . 9
3.2 Dans l'espace de Schwartz . . . 10
3.3 Transformée de Fourier holomorphe . . . 11

4 Étude asymptotique **12**
4.1 Méthode de Laplace . . . 12
4.2 Phase stationnaire . . . 13

Cadre : Dans toute la leçon, (X, τ, μ) désigne un espace mesuré et E un espace vectoriel normé de dimension finie. On considère une fonction $f : E \times X \to \mathbb{C}$ et on pose :

$$F(t) = \int_X f(t,x) d\mu(x)$$

1 Régularité

Le but de cette partie est d'étudier les résultats de régularité de la fonction F.

1.1 Continuité

Théorème 1

Supposons les conditions suivantes vérifiées :

1. *Pour tout $t \in E$, la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est mesurable.*
2. *Pour presque tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est continue en $t_0 \in E$.*
3. *Il existe une fonction $g \in L^1$ positive indépendante de t telle que*

$$|f(t,x)| \leq g(x) \ \forall t \in E, \text{ pour presque tout } x \in X$$

Alors la fonction F est continue au point t_0.

Démonstration : Zuily-Queffelec, théorème I.1p307 ■

Corollaire 1

Supposons que

1. *Pour tout $t \in E$, $x \mapsto f(t,x)$ est mesurable.*
2. *Pour presque tout $x \in X$, $t \mapsto f(t,x)$ est continue sur E.*
3. *Pour tout compact K de E, il existe $g \in L^1$ positive indépendante de t telle que*

$$|f(t,x)| \leq g(x) \ \forall t \in K, \text{ pour presque tout } x \in X$$

Alors, la fonction F est continue sur E.

Démonstration : Zuily-Queffelec, corollaire I.2p307 ■

Exemple 1

Pour $x > 0$, on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Cette fonction est bien définie et est continue sur $]0, +\infty[$.

Contre-exemple 1

La fonction

$$f \; : \; \begin{array}{ccc} [0,+\infty[\times[0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (t,x) & \mapsto & f(t,x) = te^{-xt} \end{array}$$

est continue sur $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$ *mais*

$$F(t) = \int_0^{+\infty} f(t,x)dx$$

n'est pas continue en 0.

Démonstration : Hauchecorne, 11.22p224 ■

1.2 Dérivabilité

On suppose ici que E est un intervalle I ouvert de $\mathbb{R}$.

Théorème 2

On suppose que :

1. *Pour tout* $t \in I$, *la fonction* $x \mapsto f(t,x) \in L^1$
2. *Pour presque tout* $x \in X$, *la fonction* $t \mapsto f(t,x)$ *est dérivable sur* I.
3. *Pour tout compact* K *de* I, *il existe une fonction* $g \in L^1$ *positive, indépendante de* t, *telle que*
$$|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)| \leq g(x), \forall t \in K, \text{ pour presque tout } x \in X$$

Alors,

1. *Pour tout* $t \in I$, *la fonction* $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ *est dans* $L^1(X)$
2. *La fonction* F *est dérivable sur* I *et*
$$F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)d\mu(x)$$

Démonstration : Zuily-Queffelec, théorème I.3p308 ■

Remarque 1

- *Si dans la deuxième hypothèse du théorème, on remplace dérivable sur* I *par* C^1 *sur* I, *alors dans la deuxième assertion du théorème, on a* F *qui est* C^1.
- *On a un résultat analogue pour les dérivées d'ordre supérieur, où il faut cette fois des majorations par des fonctions* $g_j \in L^1$ *pour chaque dérivée.*
- *On peut remplacer l'intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *par un ouvert* Ω *de* $\mathbb{R}^n$, *les conditions de majorations étant alors sur chacune des dérivées partielles.*

Exemple 2

1. *La fonction* Γ *définie précédemment est en fait de classe* C^∞ *sur* $]0,+\infty[$.
2. *Calcul de*

$$F(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{\log(1+a\cos(x))}{cos(x)} dx = \frac{\pi^2}{8} + \frac{(argch(a))^2}{2}$$

Démonstration : Zuily-Queffelec, p313 et Gourdon, Problème 4p174 ■

Contre-exemple 2

La fonction

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R}\times[0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & (t,x) & \mapsto & f(t,x) = t^2 e^{-x|t|} \end{array}$$

est de classe C^1 *mais* $F(t)$ *n'est pas dérivable.*

Démonstration : Hauchecorne, 11.24p226 ■

1.3 Holomorphie

Dans ce paragraphe $E = \Omega$ désigne un ouvert de $\mathbb{C}$

Théorème 3

On suppose que :
- *Pour tout* $z \in \Omega$, *l'application* $x \mapsto f(z,x)$ *est mesurable.*
- *Pour presque tout* $x \in X$, $z \mapsto f(z,x)$ *est holomorphe.*
- *Pour tout compact* K *de* Ω, *il existe* $g_K \in L^1(X)$ *(indépendant de* z*) telle que* $|f(z,x)| \leq g(x)$ *pour presque tout* $x \in X$ *et pour tout* $z \in K$.

Alors F *est holomorphe sur* Ω *et pour tout* $z \in \Omega$, *et tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$F^{(n)}(z) = \int_X \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z,x) d\mu(x)$$

Démonstration : Objectif Agrégation, théorème 2.34 pour la formulation et Tauvel, p91 pour la démonstration ■

Développement : Prolongement méromorphe de la fonction Γ.

Exemple 3

La fonction Γ *admet un unique prolongement méromorphe sur* $\mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$.

Les théorèmes précédents ont pour cadre la théorie de Lebesgue, donc des intégrales absolument convergentes. Ils ne concernent donc pas les intégrales semi-convergentes de $\mathbb{R}$. Il existe toute une série de théorèmes analogue dans le cas des intégrales semi-convergentes. Cependant, ils sont beaucoup moins maniables et ils n'ont d'intérêt que si l'on ne connait pas la théorie de l'intégrale de Lebesgue car dans des cas pratiques d'intégrales semi-convergentes, on peut souvent par une ou plusieurs intégrations par parties, se ramener à des intégrales pour lesquelles on peut utiliser les théorèmes de la théorie de Lebesgue.
On peut cependant trouver l'énoncé de ces théorèmes dans Zuily-Queffelec, pages 309-310

2 Convolution

2.1 Définitions et premières propriétés

Dans toute cette partie, f et g désignent deux fonctions de $\mathbb{R}^N$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et toutes les intégrales sont des intégrales de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Définition 1

On dit que f et g sont convolables si, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$.
Si f et g sont convolables, on définit alors le produit de convolution (ou la convolée) de f et g par :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy$$

Critères d'existence du produit de convolution :

Théorème 4 (*Convolution dans $L^1(\mathbb{R}^N)$*)

Soit $(f, g, h) \in L^1 \times L^1 \times L^1$. Alors :

1. $(f * g) \in L^1$ *et on a* $\|(f * g)\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$
2. $f * g = g * f$ *et* $(f * g) * h = f * (g * h)$
3. *Si* $f_n \to f$ *dans* L^1 *et* $g_n \to g$ *dans* L^1 *alors* $(f_n * g_n) \to (f * g)$ *dans* L^1.

Démonstration : El Haj Laamri, Mesures, intégration, convolution et transformée de Fourier des fonctions, théorème 7.1p230 ■

Remarque 2

L'espace $(L^1, +, *)$ est une algèbre commutative sans élément neutre.

Théorème 5 (*Convolution par un élément de L^1*)

Soit $f \in L^1$.

1. *Si* $g \in L^p$, *avec* $1 \leq p < +\infty$, *alors* $f * g \in L^p$ *et on a* $\|(f * g)\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.
2. *Si* $g \in L^\infty$, *alors*
   (a) $f * g \in L^\infty$ *et on a* $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$
   (b) $f * g$ *est uniformément continue sur* $\mathbb{R}^N$.

Démonstration : El Haj Laamri, théorème 7.2p231 ■

Théorème 6 (*Convolution dans les espaces L^p*)

Soit $p \in]1, +\infty[$ et q son conjugué $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $f \in L^p$ et $g \in L^q$ alors :

1. $(f * g)(x)$ *est bien définie pour tout* $x \in \mathbb{R}^N$
2. $f * g$ *est uniformément borné sur* $\mathbb{R}^N$ *et on a*

$$\|f * g\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |(f * g)(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

3. $f * g$ *est continue sur* $\mathbb{R}^N$ *et* $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = 0$.

Démonstration : El Haj Laamri, théorème 7.3p231 ■

Application :

1. Théorème de Stone-Weierstrass dans $\mathbb{R}^n$:

Théorème 7 (*Stone-Weierstrass*)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f \in C(\Omega)$. Alors pour tout compact K de Ω, il existe une suite de polynômes qui converge uniformément vers f sur K.

Il est même possible de prendre une suite de polynômes indépendante de K.

Démonstration : Zuily-Queffelec, problème 3p350 ■

2. Théorème de convergence de Féjer

Théorème 8 (*Féjer*)

Soit $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 2π-périodique. Soit $e_n : t \mapsto e^{int}$. On définit :

(a) $D_N = \sum_{-N}^{N} e_n$ *noyau de Dirichlet d'ordre N.*

(b) $K_N = \frac{D_0 + \ldots + D_{N-1}}{n}$ *noyau de Féjer d'ordre N.*

Alors :

(a) $\forall N \geq 1, \|K_N * f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ *et*

$$\lim_{N \to +\infty} \|K_N * f - f\|_\infty = 0$$

(b) *Si* $f \in L^p$ $(1 \leq p < +\infty)$ *alors* $\forall N \geq 1, \|K_N * f\|_p \leq \|f\|_p$ *et*

$$\lim_{N \to +\infty} \|K_N * f - f\|_p = 0$$

Démonstration : Zuily-Queffelec, théorème III.2p84 ■

Conséquence : On peut en déduire le théorème de Weierstrass pour les polynômes trigonométriques : toute fonction continue sur un intervalle compact $[a, b]$ est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.

Démonstration : Zuily-Queffelec, théorème III.3p86 ■

2.2 Suites régularisantes

Proposition 1

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et soit f une fonction définie sur Ω. On considère la famille des ouverts $(\omega_i)_{i \in I}$, $\omega_i \subset \Omega$ tels que pour chaque $i \in I$, $f = 0$ presque partout sur ω_i. On pose $\omega = \cup_{i \in I} \omega_i$.
Alors $f = 0$ presque partout sur ω.
On appelle support de f et on note $Supp(f)$, l'ensemble $Supp(f) = \Omega \setminus \omega$.

Démonstration : Brezis, proposition IV.17p68 ■

Remarque 3

1. *Si* f_1 *et* f_2 *sont deux fonctions telles que* $f_1 = f_2$ *presque partout sur* Ω*, alors* $Supp(f_1) = Supp(f_2)$*. On peut donc parler du support d'une fonction* $f \in L^p(\Omega)$ *(sans préciser quel représentant on choisit dans la classe d'équivalence).*
2. *Si* f *est continue sur* Ω*, cette définition coïncide bien sur avec la définition usuelle.*

Proposition 2

Soient f *et* g *deux fonctions convolables. Alors :*

1. $Supp(f * g) \subset \overline{Supp(f) + Supp(g)}$
2. *Si* $Supp(f)$ *(ou* $Supp(g)$*) est compact,* $Supp(f * g) \subset Supp(f) + Supp(g)$
3. *Si* f *et* g *sont à support compacts, alors* $f * g$ *l'est aussi.*

Démonstration : Brezis, proposition IV.18p68 ■

Théorème 9

Soit k *un entier naturel. Si* $f \in C_c^k$ *et* $g \in L^1_{loc}$*, alors pour tout* $|\alpha| \leq k$ *:*

$$f * g \in C^k \text{ et } D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g$$

En particulier, si $f \in C_c^\infty$ *et* $g \in L^1_{loc}$*, alors* $f * g \in C^\infty$*.*

Démonstration : Brezis, proposition IV.20p69 ■

Définition 2

Soit $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ *une suite de fonctions* C^∞ *à supports compacts positives sur* $\mathbb{R}^N$*. On dit que la suite* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une approximation de l'unité si*

1. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_n(x)dx = 1$*.*
2. *Pour tout* $a > 0$*,*
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\|x\|>a} \varphi_n(x)dx = 0$$
3. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $Supp(\varphi_n) \subset B(0, \frac{1}{n})$

Exemple 4

Soit

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2-1}} & \text{si } \|x\| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On considère ensuite

$$\rho_n(x) = Cn^N\rho(nx)$$

avec $C = (\int \rho)^{-1}$*.*

Théorème 10

1. *Soit* $f \in C(\mathbb{R}^N)$*, alors* $\rho_n * f \to f$ *uniformément sur tout compact de* $\mathbb{R}^N$*.*
2. *Soit* $f \in L^p$ *avec* $1 \leq p < +\infty$*, alors* $\rho_n * f \to f$ *dans* L^p*.*

Démonstration : Brezis, proposition IV.21p70 et théorème IV.22p71 ■

Corollaire 2

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert quelconque. Alors $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < +\infty$.

Démonstration : Brezis, corollaire IV.23p71 ■

Application :

Théorème 11 (***Théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov***)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et soit ω un compact inclus dans Ω. Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble borné de $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < +\infty$. On suppose que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists 0 < \delta < dist(\omega, {}^c\Omega) \text{ tel que } \|\tau_h f - f\|_p < \varepsilon, \forall h \in \mathbb{R}^N, \text{ avec } |h| < \delta \text{ et } \forall f \in \mathcal{F}$$

Alors $\mathcal{F}_{|\omega}$ est relativement compact dans $L^p(\Omega)$.

Démonstration : Brezis, théorème IV.25p72 ■

Ce théorème est à comparer au théorème d'Ascoli (voir Brezis, théorème IV.24p72

3 Transformée de Fourier

On est pas obligés de mettre les trois sous parties sur la transformée de Fourier, on peut se contenter d'une seule des trois selon le développement que l'on a choisi de présenter (théorème de Plancherel, inversion dans l'espace de Schwartz, théorème de Paley-Wiener). Attention tout de même au fait que la preuve des théorèmes de Paley-Wiener utilise fortement les résultats sur la transformée de Fourier dans L^1 et dans L^2.

3.1 Dans L^1 et dans L^2

Définition 3

Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit la transformée de Fourier de f par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x) dx$$

Théorème 12

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ est une fonction continue qui tend vers 0 à l'infini.

Démonstration : Zuily-Queffelec, théorème IV.1p328 ■

Théorème 13 (***Théorème d'inversion***)

Si f appartient à L^1, de même que $\hat{f}$, et si

$$g(x) = \int_{-infty}^{+\infty} \hat{f}(t) e^{ixt} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

Alors g est continue, tend vers 0 en l'infini, et $f(x) = g(x)$ presque partout.

Démonstration : Rudin, théorème 9.11p224 ■

Théorème 14 (*Théorème de Plancherel*)

A chaque fonction f de L^2, on peut associer une fonction $\hat{f}$ de L^2 de sorte que les propriétés suivantes soient satisfaites :

1. *Lorsque f appartient à $L^1 \cap L^2$, $\hat{f}$ est la transformée de Fourier de f.*
2. *Pour tout f dans L^2, on a $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.*
3. *L'application $f \mapsto \hat{f}$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert de L^2 sur L^2.*
4. *Entre f et $\hat{f}$ existent les relations symétriques suivantes :*
   En posant, $\varphi_A(t) = \int_{-A}^{+A} f(x)e^{-ixt}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$ et $\psi_A(x) = \int_{-A}^{+A} \hat{f}(x)e^{ixt}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$,

$$\lim_{A\to+\infty} \|\varphi_A - f\|_2 = 0 \text{ et } \lim_{A\to+\infty} \|\psi_A - \hat{f}\|_2 = 0$$

Démonstration : Rudin, théorème 9.13p225 ■

3.2 Dans l'espace de Schwartz

Définition 4

On définit l'espace de Schwartz

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \forall p, q \in \mathbb{N}, \exists C_{p,q} > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, |x^p f^{(q)}(x)| \leq C_{p,q}\}$$

Autrement dit, f est C^∞ et n'importe quelle dérivée de f décroit à l'infini plus vite que n'importe quelle puissance de x.

Exemple 5

$f(x) = e^{-x^2}$

Théorème 15

Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

Démonstration : Zuily-Queffelec, théorème IV.3p329 ■

Exemple 6

Calcul de la transformée de Fourier de $f(x) = e^{-x^2}$. On a :

$$\hat{f}(t) = \sqrt{\pi}e^{-t^2/4}$$

Application : Formule d'inversion de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Théorème 16

Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\hat{f}(t)dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration : Zuily-Queffelec, théorème IV.5p331 ■

Théorème 17

Si f et g sont dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)g(t)dt$$

Démonstration : Zuily-Queffelec, théorème IV.6p332 ■

Corollaire 3

Si f et g sont dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\bar{g}(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)\bar{\hat{g}}(t)dt$$

Démonstration : Zuily-Queffelec, corollaire IV.7p333 ■

En prenant $f = g$ dans le corollaire précédent, on obtient pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\int |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int |\hat{f}(t)|^2 dt$$

3.3 Transformée de Fourier holomorphe

Développement :

Théorème 18 (*Premier théorème de Paley-Wiener*)

1. *Soit $F \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $F \equiv 0$ sur $]-\infty, 0[$. Alors la fonction f définie sur Π^+ par*

$$\forall z \in \Pi^+, f(z) = \int_0^{+\infty} F(t)e^{itz}dt \tag{1}$$

   est holomorphe sur Π^+ et ses restrictions aux droites horizontales de Π^+ constituent un sous-ensemble borné de $L^2(\mathbb{R})$.

2. *Réciproquement, soit $f \in H(\Pi^+)$ telle que*

$$\sup_{0<y<+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^2 dx = C < +\infty$$

   Alors, il existe $F \in L^2(\mathbb{R}_+)$ telle que

$$\forall z \in \Pi^+, f(z) = \int_0^{+\infty} F(t)e^{itz}dt$$

   et

$$\int_0^{+\infty} |F(t)|^2 dt = C$$

Théorème 19 (*Deuxième théorème de Paley-Wiener*)

1. *Soit* $0 < A < +\infty$ *et* $F \in L^2([-A, A])$. *Alors la fonction* f *définie sur* $\mathbb{C}$ *par*

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = \int_{-A}^{A} F(t)e^{itz}dt$$

est une fonction entière qui vérifie

$$\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq \int_{-A}^{A} |F(t)|dte^{A|z|}$$

et dont la restriction à l'axe réel appartient à L^2.

2. *Réciproquement, soient* A *et* C *deux constantes positives, et soit* f *une fonction entière telle que pour tout* $z \in \mathbb{C}$,

$$|f(z)| \leq Ce^{Az}$$

On suppose aussi que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty$$

Alors, il existe une fonction $F \in L^2([-A, A])$ *telle que pour tout* $z \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = \int_{-A}^{A} F(t)e^{itz}dt$$

Démonstration : Rudin ■

4 Étude asymptotique

4.1 Méthode de Laplace

Il s'agit d'étudier le comportement lorsque $t \to +\infty$ d'intégrales du type :

$$F(t) = \int_{a}^{b} e^{t\varphi(x)} f(x)dx$$

où φ est à valeurs réelles.

Théorème 20

Soit $I =]a, b[$ *un intervalle borné ou non. Soit* $\varphi \in C^2(I, \mathbb{R})$ *et* $f \in C^0(I, \mathbb{C})$. *On suppose*

1. $\int_a^b e^{t\varphi(x)}|f(x)|dx < +\infty$, $\forall t > 0$.
2. φ' *s'annule en un seul point* x_0 *de* I *et* $\varphi''(x_0) < 0$ *(donc* x_0 *est un maximum absolu strict).*
3. $f(x_0) \neq 0$.

Alors,

$$F(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{|\varphi'(x_0)|}} e^{t\varphi(x_0)} f(x_0) t^{-1/2}$$

Démonstration : Zuily-Queffelec, théorème VI.1p339 ■

Application : Formule de Stirling

- $\Gamma(t+1) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} t^{t+1/2} e^{-t}$
- $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n}$

4.2 Phase stationnaire

Le but de cette méthode est d'étudier le comportement lorsque $t \to +\infty$ d'intégrales de la forme :

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\varphi(x)} a(x) dx$$

On suppose $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et a est C^∞ à support compact dans $\mathbb{R}$.

Théorème 21

Supposons que sur le support de a, on ait :

$$\varphi'(x) \neq 0$$

Alors, la fonction F définie ci-dessus est à décroissance rapide à l'infini, c'est à dire :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists C_N > 0, |F(t)| \leq C_N t^{-N} \text{ pour } t \geq 1$$

Démonstration : Zuily-Queffelec, théorème VI.2p342 ■

Application : Étude asymptotique de la fonction d'Airy

La fonction d'Airy est définie par :

$$Ai(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx + i\frac{x^3}{3}} dx, t \in \mathbb{R}$$

Pour $t \to +\infty$, $Ai(t)$ est à décroissance rapide.

Théorème 22

On suppose qu'il existe un unique point x_0 dans le support de a tel que $\varphi'(x_0) = 0$, $\varphi''(x_0) \neq 0$ et $a(x_0) \neq 0$. Alors :

$$F(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{A_0}{\sqrt{t}}$$

ou

$$A_0 = e^{it\varphi(x_0)} \frac{\sqrt{2\pi} e^{i \, sign(\varphi''(x_0)) \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{|\varphi''(x_0)|}} a(x_0)$$

Démonstration : Zuily-Queffelec, théorème VI.3p343 ■