Leçon 241: Suites et séries de fonctions. Exemples, contre-exemples.

Adrien Fontaine

14 novembre 2012

Table des matières

On considère des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Modes de convergences, propriétés

1.1 Suites de fonctions

X désigne un ensemble quelconque, f une fonction de X dans $\mathbb{K}$ et (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{K}$.

Définition 1

On dit que (f_n) converge simplement (sur X) vers f si pour tout $x \in X$, la suite $f_n(x)$ converge vers $f(x)$, en d'autres termes si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \mid f_n(x) - f(x) \mid < \varepsilon$$

Définition 2

On dit que (f_n) converge uniformément sur X vers f si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in X, \mid f_n(x) - f(x) \mid < \varepsilon$$

Proposition 1

La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

La réciproque est fausse comme le montre le contre-exemple suivant :

Exemple 1

La suite de fonctions $f_n : [0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$ converge simplement vers 0 sur $[0,1[$, mais pas uniformément car pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x \in [0,1[$ tel que $\mid f_n(x) - 0 \mid \geq 1/2$ (la définition n'est plus vérifiée dès que $\varepsilon < 1/2$).

Proposition 2 (*Critère de Cauchy uniforme*)

(f_n) converge uniformément vers f sur X, si et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, \forall x \in X, \mid f_p(x) - f_q(x) \mid < \varepsilon$$

Démonstration : Gourdon, proposition 1p221 ■

1.2 Continuité et dérivabilité

On suppose désormais que X est muni d'une métrique d.

Théorème 1

Si (f_n) converge uniformément vers f sur X et si toutes les fonctions f_n sont continues en $x_0 \in X$, alors f est continue en x_0.

Démonstration : Gourdon, théorème 2p222 ■

Corollaire 1

Si (f_n) est continue sur X et si (f_n) converge uniformément vers f sur X, alors f est continue sur X.

Exemple 2 (*Limite simple d'une suite de fonctions continues qui est discontinue*)

La suite de fonctions $f_n : [0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$ est continue et converge simplement vers la fonction égale à 0 sur $[0,1[$ et à 1 en 1, qui n'est pas continue.

Démonstration : Hauchecorne, 12.1p231 ■

On a cependant, une réciproque partielle :

Théorème 2 (*Théorèmes de Dini*)

1. *Soit (f_n) une suite croissante de fonctions réelles continues et définies sur un segment $I = [a,b]$ de $\mathbb{R}$. Si (f_n) converge simplement vers une fonction f continue sur I, alors la convergence est en fait uniforme.*
2. *Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes réelles, continues et définies sur un segment $I = [a,b]$ de $\mathbb{R}$. Si (f_n) converge simplement vers une fonction f continue sur I, alors la convergence est en fait uniforme.*

Démonstration : Gourdon, exercice5p228 ■

Exemple 3

La suite de fonctions (f_n) définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$ est continue sur $[0,1]$, et converge simplement vers e^x sur $[0,1]$ qui est une fonction continue, donc la convergence est en fait uniforme.

Théorème 3 (*Dérivabilité et dérivée de la fonction limite*)

Soit (f_n) une suite de fonctions de classe C^1 d'un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$. On suppose que
- *il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que la suite $(f_n(x_0))$ converge.*
- *la suite de fonctions (f_n') converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction g.*

Alors, f_n converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f de classe C^1 et vérifiant $f' = g$.

Démonstration : Gourdon, théorème 4p223 ■

Corollaire 2

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et (f_n) une suite de fonctions de classe C^p d'un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que pour tout $k \in \{0,...,p\}$, la suite de fonctions $(f_n)^{(k)}$ converge uniformément vers une fonction g_k sur $[a,b]$. Alors la limite uniforme $f = g_0$ de (f_n) est de classe C^p et vérifie $f^{(k)} = g_k$ pour tout $k \in \{0,...,p\}$.

Exemple 4

IL existe une suite de fonctions (f_n) de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ ayant pour limite uniforme une fonction dérivable, alors que la suite $f_n')$ des fonctions dérivée ne converge pas.
On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

Démonstration : Hauchecorne, 12.14p240 ■

1.3 Séries de fonctions

Comme pour les séries numériques, une série de fonctions $\sum g_n$ est définie comme étant la suite de fonctions (f_n) avec $f_n = g_0 + ... + g_n$. On définit donc de manière analogue aux suites de fonctions, la notion de série de fonctions simplement convergente et uniformément convergente.On dispose par ailleurs du théorème suivant, pour caractériser la convergence uniforme des séries de fonction :

Théorème 4

Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur X et si sa somme est la fonction S, la série $\sum f_n$ converge uniformément sur X, si et seulement si, la suite de fonctions $\sum_{p\geq n+1} f_p$ converge uniformément sur X vers la fonction nulle de X dans $\mathbb{R}$.

Démonstration : Hauchecorne, théorème 13.1p251 ■

Définition 3

On dit qu'une série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement si $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Exemple 5

La série de fonction $\sum f_n$ définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \frac{x^n}{n^2}$ converge normalement sur $[0,1]$ car $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n^2}$ donc $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Théorème 5

Une série de fonctions $\sum f_n$ qui converge normalement sur X converge uniformément sur X.

Démonstration : Gourdon, théorème 1p222 ■

Exemple 6

La série de fonctions $\sum f_n$ où f_n est définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = (-1)^n \frac{x}{n^2+x^2}$, converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ tout entier mais la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}^+$.

Théorème 6

Si (f_n) est une suite de fonctions définies et continues sur une partie X de $\mathbb{R}$ et si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur X, sa somme est une fonction continue sur X.

Démonstration : Hauchecorne, théorème 13.3p256 ■

Exemple 7

Le résultat est faux si l'on remplace l'hypothèse de convergence uniforme par de la convergence simple, comme le montre le contre-exemple suivant :
Soit (f_n) une suite d'applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, de terme général $f_n(x) = (1-x)x^n$.
Alors $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction qui n'est pas continue.

Démonstration : Hauchecorne, 13.9p257 ■

Théorème 7

Soit une série de fonctions $\sum f_n$ définie sur $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$. On suppose que les f_n sont de classe C^1 sur $[a,b]$ et qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $\sum f_n(x_0)$ converge. Si la série *de fonction $\sum f_n'$ converge normalement sur $[a, b]$, alors $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, b]$ vers une fonction C^1 sur $[a, b]$ et on a $(\sum f_n)' = \sum f_n'$.*

Les séries de fonctions s'avèrent aussi extrêmement utiles pour fournir des exemples "pathologiques" de fonctions, comme par exemple une fonction continue partout dérivable nulle part [1]

Exemple 8

On note Δ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ 1-périodique, dont la restriction à $[-1/2, 1/2]$ vérifie $\Delta(x) = \mid x \mid$. Alors la fonction $\sum_{p\geq 0} \frac{\Delta(2^p x)}{2^p}$ est continue partout dérivable nulle part.

Démonstration : Gourdon, exercice 9p84 ■

2 Intégrabilité de suites et séries de fonctions

Cadre : $(X, \mathcal{A}, \mu)$ désigne un espace mesuré.

2.1 Convergences dans un espace mesuré

Soient $f : X \to \mathbb{K}$ et (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{K}$.

Définition 4

On dit que f_n converge μ-presque partout (μ-pp) vers f sur X si il existe $Y \subset X$ tel que $\mu(X \setminus Y) = 0$ et f_n converge simplement vers f sur Y.

Définition 5

On dit que $(f_n) \in (L^p)^{\mathbb{N}}$ converge vers f dans L^P si $\|f_n - f\|_p \to 0$ quand n tend vers $+\infty$.

Exemple 9

La convergence L^p n'implique pas la convergence μ-pp.
En effet, la suite de fonctions définie par

$$\forall n \geq 1, f_n(x) = 1_{[\frac{k}{2^N}, \frac{k+1}{2^N}]}(x) \text{ avec } \begin{cases} 2^N \leq n+1 \leq 2^{N+1} \\ k = n - 2^N + 1 \end{cases}$$

converge vers 0 dans L^p mais pas presque surement.

Exemple 10

La convergence μ-pp n'implique pas la convergence dans L^P pour $p < +\infty$.
En effet, la suite de fonctions définie par $f_n = n^{1/p} 1_{[0, \frac{1}{n}]}$ converge μ-pp vers 0 mais $\|f_n\|_p = 1$ pour tout n.

1. En fait, ce n'est pas si pathologique que ça puisque l'on peut montrer que l'ensemble des fonctions continues partout dérivables nulle part, est dense dans l'ensemble des fonctions continues

2.2 Théorèmes principaux

Théorème 8 (*Théorème de Beppo-Levi*)

On suppose que la suite f_n de fonctions est mesurable croissante, i.e $\forall n \in \mathbb{N} f_n \leq f_{n+1}$. Alors

$$\lim f_n \text{ est mesurable et } \int_X \lim_n f_n d\mu = \lim_n \int_X f_n d\mu$$

Démonstration : Briane et Pagès, théorème 8.1p131 ■

Lemme 1 (*Lemme de Fatou*)

On suppose que les f_n sont mesurables et positives. Alors :

$$0 \leq \int_X \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu \leq +\infty$$

Démonstration : Briane et Pagès, théorème 8.2p132 ■

Théorème 9 (*Théorème de convergence dominée*)

On suppose que (f_n) vérifie :

1. *Pour tout n, $f_n \in L^1$.*
2. *f_n converge μ-pp vers f.*
3. *Il existe $g \in L^1$ telle que pour tout $n \geq 1$, $\mid f_n(x) \mid \leq g(x)$ μ-pp.*

Alors $f \in L^1$ et

$$\lim_n \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu \text{ et } \lim_n \int_X \mid f_n - f \mid d\mu = 0$$

Démonstration : Briane et Pagès, théorème 8.3p134 ■

Application : Intégration d'une dérivée
Soit f une fonction partout dérivable sur $[0, 1]$ de dérivée f' bornée. Alors f est l'intégrale de sa dérivée au sens où

$$\int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0)$$

Démonstration : Briane et Pagès, application 8.2p136 ■

On a vu que la convergence, dans L^p n'entraînait pas la convergence μ-pp. On dispose cependant d'une réciproque partielle :

Théorème 10

Soient (f_n) une suite de fonctions dans L^p et $f \in L^p$ tels que $\|f_n - f\|_p \to 0$. Alors il existe une sous-suite extraite f_{n_k} telle que

1. *$f_{n_k} \to f$ μ-pp*
2. *μ-pp, on a pour tout k, $\mid f_{n_k} \mid \leq h$ avec $h \in L^p$.*

Démonstration : Brezis, théorème IV.9p58 ■

De même, bien que l'on ne dispose pas de l'implication, convergence μ-pp $\Rightarrow$ convergence dans L^p, on dispose d'une réciproque partielle :

Théorème 11 (*Théorème de Brezis-Lieb*)

Soit $1 \leq p < +\infty$ et $(f_n) \in (L^p)^{\mathbb{N}}$. On suppose que :

1. $\sup_n \|f_n\|_p < +\infty$
2. *f_n converge vers f sur μ-pp*

Alors $f \in L^p$ et $\lim_n \left(\|f_n\|_p^p - \|f_n - f\|_p^p\right) = \|f\|_p^p$.

Démonstration : Willem, Analysé fonctionnelle élémentaire ■

Corollaire 3

Si (f_n) converge μ-pp vers $f \in L^p$ et si $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$ alors $f_n \to f$ dans L^p.

Remarque 1

On dispose ainsi d'une CNS pour que la convergence μ-pp implique la convergence dans L^p.

2.3 Interversion $\int$ et $\sum$

Théorème 12 (*Théorème de Fubini*)

Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables à valeurs $\bar{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$.

1. *Si les fonctions f_n sont positives pour tout $n \geq 1$, alors :*

$$\int_X \left(\sum_{n\geq 1} f_n\right) d\mu = \sum_{n\geq 1} \int_X f_n d\mu$$

2. *Si $\sum_{n\geq 1} \int_X \mid f_n \mid d\mu < +\infty$, alors les fonctions f_n, $\sum_{n\geq 1} \mid f_n \mid$ et la fonction définie μ-pp $\sum_{n\geq 1} f_n$ sont intégrables. En outre,*

$$\int_X \left(\sum_{n\geq 1} f_n\right) d\mu = \sum_{n\geq 1} \int_X f_n d\mu$$

Démonstration : Briane et Pagès, théorème 8.4p137 ■

3 Séries entières et fonctions holomorphes

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

3.1 Séries entières

Théorème 13 (*Lemme d'Abel*)

Soient $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$. On suppose que la suite $a_n z_0^n$ est bornée. Alors, la série $\sum a_n z^n$ est normalement convergente dans le disque $D(0, r)$ pour $r <\mid z_0 \mid$.

Démonstration : Tauvel, théorème 3.2.1p36 ■

Définition 6

Soit f une fonction définie dans un voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$. On dit que f est développable en série entière en z_0 s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ et une voisinage V de z_0 dans $\mathbb{C}$ tels que, pour tout $z \in V$,

$$f(z) = \sum_{n+0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Proposition 3

Soit f une fonction définie dans un voisinage de 0 et admettant un développement en série entière à l'origine. Alors :

1. *Il existe un voisinage de 0 sur lequel f est indéfiniment dérivable.*
2. *Le développement en série entière de f à l'origine est donné par son développement de Taylor, i.e $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$*

Démonstration : Tauvel, théorème 3.5.3p40 ■

Exemple 11

Attention ! Le résultat est faux si l'on considère des fonctions de la variable réelle. Par exemple, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1_{\mathbb{R}^+} e^{-1/x}$ est une fonction C^∞ de la variable réelle mais n'est pas développable en série entière.

DÉVELOPPEMENT :

Théorème 14 (*Théorème Taubérien fort de Hardy-Littlewood*)

Soit (a_n) une suite de réels vérifiant $a_n = \bigcirc(\frac{1}{n})$ en $+\infty$, telle que la série entière $\sum a_n z^n$ ait un rayon de convergence ≥ 1 et que sa somme $F(x)$ vérifie $\lim_{x \to 1^-} F(x) = s$. Alors la série $\sum a_n$ converge et vaut s.

Démonstration : Quitte à considérer $a_0 - s$ comme premier terme de la suite, on peut toujours supposer que $s = 0$.

On note :

$$\Phi = \{\varphi : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} \sum a_n \varphi(x^n) \text{ converge} \\ \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \varphi(x^n) = 0 \end{cases} \}$$

Soit g la fonction définie par :

$$\begin{array}{rcccl} g & : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \end{array}$$

Posons $N_x = \lfloor \frac{-\ln(2)}{\ln(x)} \rfloor$. Alors pour $x \in [0, 1[$,

$$\sum_{n \geq 0} a_n g(x^n) = \sum_{n=0}^{N_x} a_n$$

De plus, $N_x \to +\infty$ quand $x \to 1^-$, donc si on arrive à montrer que $q \in \Phi$, alors on aura montré le théorème.

Montrons que tout polynôme nul en 0 est un élément de Φ, i.e $X\mathbb{R}[X] \subset \Phi$.
Il est clair que Φ est stable par combinaison linéaire, donc il suffit de montrer que $X^k \in \Phi$ pour tout $k \geq 1$. Soit $k \geq 1$, on a $\sum_{n\geq 0} a_n x^{kn}$ qui converge car si $x < 1$ alors $x^k < x < 1$.
De plus,

$$\forall x \in [0,1[, \sum_{n\geq 0} a_n x^{kn} = F(x^k) \to 0 \text{ quand } x \to 1^-$$

Donc, $X\mathbb{R}[X] \subset \Phi$.
On a maintenant besoin d'un lemme
Lemme 2

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], (1-x)\sum_{n\geq 0} x^n P(x^n) \to \int_0^1 P(t)dt \textit{ quand } x \to 1^-$$

Là encore, par linéarité, il suffit de démontrer le résultat pour tous les monômes $X^k, k \geq 0$. On a :

$$\begin{aligned}(1-x)\sum_{n\geq 0} x^n x^{kn} &= (1-x)\sum_{n\geq 0}(x^{k+1})^n \\ &= \frac{1-x}{1-x^{k+1}} \\ &= \frac{1}{1+x+...+x^k}\end{aligned}$$

donc, $\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n\geq 0} x^n (x^k)^n = \frac{1}{k+1} = \int_0^1 t^k dt$. D'où le résultat pour tout polynôme P.
On va maintenant essayer de d'approcher g par des polynômes. Pour cela, on écrit g sous la forme $q(x) = x + x(1-x)h(x)$. Ce qui revient à considérer la fonction

$$h(x) = \frac{g(x)-x}{x(1-x)}$$

Ainsi,

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x} & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe deux fonctions s_1 et s_2 continues telles que $s_1 \leq h \leq s_2$ et $\int_0^1 s_2 - s_1 < \varepsilon$ (faire un dessin pour s'en convaincre : prendre deux fonctions égales à h sur $[0,1]$sauf sur un petit voisinage de la discontinuité en $x = 1/2$, et joindre les extrémités dans la partie manquante par une ligne continue qui reste toujours du même côté du graphe de h et qui reste bornée). Comme s_1 et s_2 sont continues, on peut trouver deux polynômes t_1 et t_2 tels que $\mid t_1 - s_1 \mid < \varepsilon$ et $\mid t_2 - s_2 \mid < \varepsilon$ sur $[0,1]$ (théorème de Weierstrass). On pose alors $U_1 = t_1 - \varepsilon$ et $U_2 = t_2 + \varepsilon$. On a $U_1 \leq h \leq U_2$ (vu qu'on s'est suffisamment éloigné de t_1 et t_2) et

$$\begin{aligned}\int_0^1 U_2 - U_1 &= \int_0^1 t_2 - t_1 + 2\varepsilon \\ &\leq \int_0^1 t_2 - s_2 + s_2 - s_1 + s_1 - t_1 + 2\varepsilon \\ &\leq \varepsilon + \int_0^1 s_2 - s_1 + 3\varepsilon \\ &< 5\varepsilon\end{aligned}$$

Compte tenu de ce qui vient d'être fait, il est naturel de poser

$$P_1(x) = x + x(1-x)U_1(x)$$
$$P_2(x) = x + x(1-x)U_2(x)$$
$$Q(x) = U_2(x) - U_1(x) = \frac{P_2(x) - P_1(x)}{x(1-x)}$$

On a alors :

$$\begin{cases} P_1(0) = P_2(0) = 0 \\ P_1(1) = P_2(1) = 1 \\ P_1 \leq g \leq P_2 \\ \int_0^1 Q \leq 5\varepsilon \end{cases}$$

Il ne nous reste plus qu'à conclure.
Par hypothèse, il existe $M > 0$ tel que $a_n \leq \frac{M}{n}$ pour tout n. Soit $x \in [0,1[$. On a :

$$\begin{aligned} &\mid \sum_{n\geq 0} a_n g(x^n) - \sum_{n\geq 0} a_n P_1(x^n) \mid \\ &\leq \sum_{n\geq 0} \mid a_n \mid (P_2 - P_1)(x^n) \\ &\leq M \sum_{n\geq 0} \frac{x^n(1-x^n)}{n} Q(x^n) \end{aligned}$$

Or,

$$1 - x^n = (1-x)(1 + x + ... + x^{n-1}) \leq n(1-x)$$

D'où,

$$\mid \sum_{n\geq 0} a_n g(x^n) - \sum_{n\geq 0} a_n P_1(x^n) \mid \leq M(1-x) \sum_{n\geq 0} x^n Q(x^n)$$

donc,

$$\mid a_n g(x_n) \mid \leq \mid \sum_{n\geq 0} a_n P_1(x^n) \mid + M(1-x) \sum_{n\geq 0} x^n Q(x^n)$$

D'après le lemme, le deuxième terme de cette inégalité tend vers $M \int_0^1 Q(t)dt \leq 5M\varepsilon$ quand $x \to 1^-$. Et le premier terme tend vers 0 car $P_1 \in \Phi$ d'après la première étape de la démonstration. D'où le résultat. ■

3.2 Fonctions holomorphes

Définition 7

Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite holomorphe sur Ω si elle est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de Ω.

Théorème 15 (*Formule de Cauchy*)

Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur Ω, $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset \Omega$. Alors

$$\forall z \in \Omega \setminus C(z_0, r), f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Démonstration : Tauvel, théorème 6.4.7p77 ■

Corollaire 4

Si f est holomorphe sur Ω alors f est développable en série entière en tout point de Ω.

Démonstration : Tauvel, théorème 6.5.2p77 ■

Théorème 16

Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ et $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions holomorphes. On suppose que $f_n \to f$ uniformément sur tout compact de Ω. Alors f est holomorphe et $f'_n \to f'$ sur tout compact de Ω.

Démonstration : Rudin, théorème 10.28p256 ■

4 Séries de Fourier

4.1 Définitions

Définition 8

Si $1 \leq p \leq \infty$, L^p désigne l'espace vectoriel des (classes de) fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodiques et Lebesgue-mesurables, telles que $\|f\|_p < \infty$ avec

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid f(t) \mid^p dt\right)^p \text{ si } 1 \leq p < \infty$$

et $\|f\|_\infty$ est la borne supérieure essentielle de f.

Définition 9

Si $f \in L^1$ et $n \in \mathbb{Z}$, on définit le $n-$ième coefficient de Fourier de f par la formule :

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$$

Théorème 17 (*Lemme de Riemann-Lebesgue*)

Si $f \in L^1$ alors $\hat{f}(n) \to 0$ quand $\mid n \mid \to +\infty$.

Démonstration : Zuily-Queffelec, proposition I.6p73 ■

4.2 Théorèmes principaux

On pose pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$S_N(f) = \sum_{-N}^{N} \hat{f}(n)e^{int} \text{ et } \sigma_N(f) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} S_k(f)}{N}$$

Théorème 18 (*Théorème de Dirichlet*)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique, mesurable, et intégrable sur $[0, 2\pi]$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, on suppose *que les limites à gauche et à droite de f en x_0 existent. Alors,*

$$\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(x_0) = \frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$$

Démonstration : Zuily-Queffelec, théorème III.6p89 ■

En particulier, si f est continue, $S_N(f)$ converge simplement vers f. **Application :** Calcul de $\sum \frac{1}{n^2}$ à partir du développement en série de Fourier de $f(x) = \frac{1-x^2}{\pi}$.

Théorème 19 (*Théorème de Féjer*)

1. *Si f est continue et 2π-périodique, alors $\forall N \geq 1, \|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et $\lim \|\sigma_N(f)_f\|_\infty = 0$.*
2. *Si $f \in L^p$ $(1 \leq p < \infty)$, alors $\forall N \geq 1, \|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$ et $\lim \|\sigma_N(f)_f\|_p = 0$.*

Démonstration : Zuily-Queffelec, théorème III.2p84 ■

Corollaire 5 (*Théorème de Weierstrass*)

Toute fonction continue sur un intervalle compact $[a,b]$ est limite uniforme d'une suite de polynômes algébriques.

Démonstration : Zuily-Queffelec, théorème III.3p86 ■

Si $f \in L^1$, on pose $\gamma(f) = (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$. On a alors la proposition suivante :

Proposition 4

Si $f, g \in L^1$, alors $\gamma(f) = \gamma(g)$
$Rightarrow f = g$ presque partout.

Démonstration : Zuily-Queffelec, théorème III.3p86 ■

Proposition 5

Si $f \in L^1$ et est telle que $\sum \mid \hat{f}(n) \mid$ converge, alors f est égale à sa série de Fourier et est continue.

Développement : Formule sommatoire de Poisson
Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit sa transformée de Fourier par la formule

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi xt} f(t)dt$$

La formule sommatoire de Poisson est une formule qui relie sous certaines hypothèses la somme des valeurs prises par f aux points entiers, à la somme des valeurs prises par $\hat{f}$ aux points entiers. De façon plus précise, on a l'énoncé suivant :

Théorème 20 (*Formule sommatoire de Poisson*)

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $M > 0$ et $\alpha > 1$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}, \mid f(x) \mid \leq M(1+\mid x \mid)^{-\alpha}$. On suppose également que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mid \hat{f}(n) \mid < +\infty$. Alors :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)$$

Démonstration : Définissons la fonction $F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$.

Alors F est bien définie et est continue sur $\mathbb{R}$. En effet, montrons que cette série converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Soit $A > 0$ et soit $x \in [-A, A]$. Alors, $\mid x+n \mid \geq n- \mid x \mid \geq n-A$. Pour tout $n \geq 2A$, on a donc $\mid x+n \mid \geq \frac{n}{2}$. Ainsi,

$$\mid f(x+n) \mid \leq \frac{1}{(1+\frac{n}{2})^\alpha}$$

majoration indépendante de x et dont la série converge puisque $\alpha > 1$.

On remarque par ailleurs que F est clairement 1-périodique. On peut alors calculer son n-ème coefficient de Fourier [2].

$$\hat{F}(n) = \int_0^1 F(x)e^{-2i\pi nx}dx = \int_0^1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+k)e^{-2i\pi nx}dx$$

Or, la convergence de la série étant normale sur le compact $[0,1]$, on peut intervertir somme et intégrale :

$$\hat{F}(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+k)e^{-2i\pi nx}dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_k^{k+1} f(u)e^{-2i\pi nu}e^{2i\pi nk}du = \int_{\mathbb{R}} f(u)e^{-2i\pi nu}du = \hat{f}(n)$$

Enfin, comme $F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, et que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mid \hat{F}(n) \mid = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mid \hat{f}(n) \mid < \infty$, la série de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{F}(n)e^{2i\pi nx}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, et F est égale à sa série de Fourier (par injectivité de Fourier). On a alors :

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{F}(n)e^{2i\pi nx} == \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{2i\pi nx}$$

D'où le résultat en évaluant en $x = 0$. ■

Voyons maintenant une application de la formule sommatoire de Poisson. On définit les fonctions $\Theta(z,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\pi n^2\tau}e^{2i\pi nz}$ (solutions de l'équation de la chaleur [3]), où $z, \tau \in \mathbb{C}$ avec $Im(z), Im(\tau) > 0$.

On s'intéresse ici à la fonction θ définie par $\theta(t) = \Theta(0, it) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}$, pour tout $t > 0$.

Proposition 6

Pour tout $t > 0$, la fonction θ vérifie :

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\theta(\frac{1}{t})$$

Démonstration : Fixons $t > 0$. On considère la fonction G définie par $G(x) = e^{-\pi tx^2}$. Calculons la transformée de Fourier de G. Ce résultat est classique. Si $G_a(x) = e^{-ax^2}$ $(a > 0)$, alors :

$$\hat{G_a}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2-2i\pi x\xi}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{-\pi^2\xi^2}{a}}$$

Ce résultat peut se retrouver d'au moins deux façons. Soit on trouve une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par $\hat{G_a}$ à l'aide du théorème de dérivation sous le signe intégrale. Soit on intègre

2. Attention ! La fonction F est 1-périodique et non 2π-périodique, comme on en a l'habitude. Il faut donc adapter la formule pour les coefficient de Fourier

3. voir paragraphe 3 page 105 du Zuily-Queffelec

sur le plan complexe sur des rectangles de plus en plus grands, et on utilise la formule de Cauchy. La forme sommatoire de Poissons permet maintenant d'écrire :

$$\theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{G}(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{\frac{-\pi n^2}{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}}\theta(\frac{1}{t})$$

ce qui achève la démonstration. ■

4.3 Théorie L^2

Soit $f \in L^2$.

Théorème 21

$(e^{int})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de L^2.

Démonstration : Zuily-Queffelc, théorème III.3p86 ■

Corollaire 6

Si $f \in L^2$, alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mid \hat{f}(n) \mid^2 = \|f\|_2^2$ et $\lim_{N\to\infty} \|S_N(f) - f\|_2 = 0$.

Démonstration : Zuily-Queffelec, théorème III.3p86 ■