Leçon 245: Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.

Adrien Fontaine

26 novembre 2012

Table des matières

Dans toute la leçon, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{C}$.

1 Généralités sur les fonctions holomorphes

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1

Soit f une fonction complexe définie sur Ω. Si $z_0 \in \Omega$ et si

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe, alors on dit que f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 et on note $f'(z_0)$ sa dérivée en z_0.
Si $f'(z_0)$ existe pour tout $z_0 \in \Omega$, nous dirons que f est holomorphe sur Ω.
La classe de toutes les fonctions holomorphes sur Ω sera noté $H(\Omega)$.

Exemple 1

- *$z \mapsto z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ de dérivée 1.*
- *$z \mapsto \bar{z}$ n'est $\mathbb{C}$-dérivable en aucun point de $\mathbb{C}$.*

Proposition 1

Si $f \in H(\Omega)$ et $g \in H(\Omega)$, alors $f + g$ et fg appartiennent aussi à $H(\Omega)$.
De plus, si $f \in H(\Omega)$, si $f(\Omega) \subset \Omega_1$, et si $g \in H(\Omega_1)$, alors $h = g \circ f \in H(\Omega)$ et pour tout $z_0 \in \Omega$,

$$g \circ f'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$$

Démonstration : Rudin, remarques 10.3p242 ■

Exemple 2

- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z \mapsto z^n$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, et de même pour tout polynôme en z.*
- *$z \mapsto \frac{1}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Et donc, si f_1 et f_2 sont dans $H(\Omega)$ et si Ω_0 est un ouvert de Ω sur lequel f_2 n'a pas de zéro, alors $\frac{f_1}{f_2} \in H(\Omega_1)$.*

Définition 2

Une fonction f est dite analytique si elle est développable en série entière dans Ω, c'est à dire si pour tout $D(a,r) \subset \Omega$, il existe $(c_n) \in (\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall z \in D(a,r), f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

On note $A(\Omega)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur Ω.

Théorème 1

Si $f \in A(\Omega)$, alors $f \in H(\Omega)$. De plus f' est aussi analytique sur Ω.

Démonstration : Rudin, théorème 10.6p243 ■

Corollaire 1

Si $f \in A(\Omega)$, alors f a des dérivées de tout ordre, et toutes ses dérivées sont dans $A(\Omega)$.

Démonstration : Rudin, corollaire p244 ■

1.2 Holomorphie et différentiabilité

Proposition 2

Soit f une fonction définie sur un voisinage de $z_0 = x_0 + iy_0$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0.*
2. *f est différentiable en (x_0, y_0) et on a :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

3. *f est différentiable en $(x_0, y_0$ et $df(x_0, y_0)$ est $\mathbb{C}$-linéaire.*

Si ces conditions sont vérifiées, on a :

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Démonstration : Tauvel, proposition 5.2.2p59 ■

Exemple 3

Ainsi, une fonction holomorphe est différentiable, mais la réciproque est fausse comme le montre le contre-exemple $z \mapsto \bar{z}$ qui est C^∞ mais pas holomorphe.

Corollaire 2 (*Conditions de Cauchy Riemann*)

Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$. On note $u = Re(f)$ et $v = Im(f)$ de sorte que $f = u + iv$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *f est holomorphe sur Ω*
2. *f est différentiable sur Ω et*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} & = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Démonstration : Objectif Agrégation, théorème 2.14p57 ■

Exemple 4

Les conditions de Cauchy-Riemann, seules, ne suffisent pas pour caractériser l'holomorphie, l'hypothèse de $\mathbb{R}$-différentiabilité est nécessaire. Par exemple, la fonction $f(z) = \sqrt{|xy|}$ pour tout $z = x + iy$ n'est pas holomorphe en 0, bien que les parties réelles et imaginaires u et v de f possèdent des dérivées partielles en 0, et qu'elles vérifient les conditions de Cauchy-Riemann.

Proposition 3

Si Ω est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et si $f \in H(\Omega)$, alors si f' est identiquement nulle sur Ω, alors f est constante.

Démonstration : Tauvel, proposition 5.2.6p61 ∎

Proposition 4

On suppose que Ω est un ouvert connexe et que $f \in H(\Omega)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *f est constante sur Ω.*
2. *$Re(f)$ est constante sur Ω.*
3. *$Im(f)$ est constante sur Ω.*
4. *$|f|$ est constante sur Ω.*
5. *$\bar{f} \in H(\Omega)$.*

Démonstration : Tauvel, proposition 5.2.7p61 ∎

2 Fonctions holomorphes. Propriétés générales

2.1 Formule de Cauchy

Définition 3

Un chemin est une application γ de classe C^1 par morceaux, définie sur un segment compact $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, à valeur dans $\mathbb{C}$. Si de plus, $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$, on dit que γ est un chemin fermé. On note γ^* l'image de $[\alpha, \beta]$ par γ.

Définition 4

Si γ est un chemin et si f est continue sur γ^*, l'intégrale de f le long de γ est définie par :

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Théorème 2

Soit γ un chemin fermé, et Ω le complémentaire de γ^* relativement au plan complexe. On définit :

$$\forall z \in \Omega, Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}$$

La fonction Ind_γ est une fonction à valeurs entières sur Ω, constante sur chaque composante connexe de Ω, nulle sur la composante connexe non bornée de Ω.

Démonstration : Rudin, théorème 10.10p247 ■

Intuitivement, il y a plusieurs façons d'entourer un point z : une courbe peut en faire plusieurs fois le tour dans un sens ou dans l'autre. La notion d'indice d'une courbe par rapport à z quantifie ce phénomène.

Exemple 5

Si γ est le cercle orienté positivement de centre a et de rayon r, on a :

$$Ind_\gamma(z) = \begin{cases} 1 & si\ |z-a| < r \\ 0 & si\ |z-a| > r \end{cases}$$

Démonstration : Rudin, théorème 10.11p248 ■

Théorème 3 (*Théorème de Cauchy pour un triangle*)

Soit Δ un triangle fermé inclus dans Ω. Soit $p\Omega$ et soit f une fonction continue sur Ω telle que $f \in H(\Omega \setminus \{p\})$. On a :

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$$

Démonstration : Rudin, théorème 10.13p249 ■

Théorème 4 (*Théorème de Cauchy pour un ensemble convexe*)

On suppose que Ω est convexe, $p \in H(\Omega)$ et $f \in H(\Omega \setminus \{p\})$. On a pour tout chemin fermé γ dans Ω :

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Démonstration : Rudin, théorème 10.14p250 ■

Théorème 5 (*Formule de Cauchy pour un ensemble convexe*)

Soit γ un chemin fermé dans un ouvert convexe Ω et soit $f \in H(\Omega)$. Si $z \in \Omega$ et si $z \notin \gamma^*$, on a :

$$f(z)Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi$$

Le cas le plus intéressant est évidemment le cas où $Ind_\gamma(z) = 1$.

Démonstration : Rudin, théorème 10.15p250 ■

Théorème 6

Toute fonction holomorphe sur Ω est analytique sur Ω. Plus précisément,

1. *f est analytique et le rayon de convergence de la série entière au point a est au moins égal à $d(a, \mathbb{C} \setminus \Omega)$.*
2. *Si Ω est convexe, et si γ est un chemin fermé dans Ω tel que $a \notin \gamma^*$, on a :*

$$f^{(n)}(a) Ind_\gamma(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{(n+1)}} d\xi$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration : Rudin, théorème 10.16p250 + Tauvel, théorème 6.5.2p77 ■

Le théorème de Cauchy a une réciproque utile :

Théorème 7 (*Théorème de Morera*)

Soit f une fonction continue complexe sur un ouvert Ω telle que pour tout triangle fermé $\Delta \subset \Omega$,

$$\int_{\partial \Delta} f(z) dz = 0$$

Alors $f \in H(\Omega)$.

Démonstration : Rudin, théorème 10.17p251 ■

2.2 Représentation en séries entières

Théorème 8 (*Théorème des zéros isolés*)

On suppose que Ω est un ouvert connexe non vide. Soit $f \in H(\Omega)$. Posons :

$$Z(f) = \{a \in \Omega / f(a) = 0\}$$

Alors ou bien $Z(f) = \Omega$ ou bien $Z(f)$ n'a pas de point d'accumulation dans Ω. Dans ce dernier cas, à chaque $a \in Z(f)$ correspond un unique entier positif m tel que

$$\forall z \in \Omega, f(z) = (z - a)^m g(z)$$

où $g \in H(\Omega)$ et $g(a) \neq 0$. De plus,, $Z(f)$ est au plus dénombrable.

Démonstration : Rudin, théorème 10.18p251 ■

Corollaire 3

Si f et g sont des fonctions holomorphes sur un ouvert connexe Ω et si $f(z) = g(z)$ pour tout z dans un ensemble ayant un point d'accumulation dans Ω, alors $f(z) = g(z)$ pour tout z dans Ω.

Démonstration : Rudin, corollaire p252 ■

Théorème 9

Si f est définie par

$$\forall z \in D(a,R), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

et si $0 < r < R$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(a+re^{i\theta})|^2 d\theta$$

Démonstration : Rudin, théorème 10.22p254 ■

Théorème 10 (*Théorème de Liouville*)

Toute fonction entière (i.e holomorphe sur tout le plan complexe) et bornée est constante.

Démonstration : Rudin, théorème 10.23p254 ■

Théorème 11

On suppose que Ω est un ouvert connexe non vide, $f \in H(\Omega)$ et $\bar{D}(a,r) \subset \Omega$ où $r > 0$. Alors :

$$|f(a)| \leq \max_{\theta} |f(a+re^{i\theta})|$$

avec égalité si et seulement si, f est constante sur Ω.

Démonstration : Rudin, théorème 10.24p254 ■

Par conséquent, à moins que f ne soit constante, $|f|$ ne possède pas de maximum en un point quelconque de Ω.

Corollaire 4

Avec les mêmes hypothèses, si f ne s'annule pas dans $D(a,r)$,

$$|f(a)| \geq \min_{\theta} |f(a+re^{i\theta})|$$

Démonstration : Rudin, corollaire p255 ■

Applications :

1. **Théorème 12 (*Théorème de d'Alembert-Gauss*)**

   Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n a exactement n racines (comptées avec leur ordre de multiplicité) dans le plan complexe.

   Démonstration : Rudin, théorème 10.25p255 ■

   Théorème 13 (*Holomorphie sous le signe somme*)

   Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et $f : \Omega \times X \to \mathbb{C}$. Posons :

$$\forall z \in \mathbb{C}, F(z) = \int_X f(z,x) d\mu(x)$$

On suppose que :

2. – *Pour tout $z \in \Omega$, l'application $x \mapsto f(z,x)$ est mesurable.*
   – *Pour presque tout $x \in X$, $z \mapsto f(z,x)$ est holomorphe.*
   – *Pour tout compact K de Ω, il existe $g_K \in L^1(X)$ (indépendant de z) telle que $|f(z,x)| \leq g(x$ pour presque tout $x \in X$ et pour tout $z \in K$.*

Alors F est holomorphe sur Ω et pour tout $z \in \Omega$, et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F^{(n)}(z) = \int_X \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z,x)d\mu(x)$$

Démonstration : Objectif Agrégation, théorème 2.34 pour la formulation et Tauvel, p91 pour la démonstration ■

Applications : Transformée de Fourier holomorphe et théorèmes de Paley-Wiener
Usuellement, la transformée de Fourier d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est considérée comme une fonction $\hat{f}$, également définie sur $\mathbb{R}$. Il est souvent possible de prolonger $\hat{f}$ en une fonction holomorphe sur un certain domaine du plan complexe. Le théorème de Morera permet de démontrer deux théorèmes de Paley et Wiener, qui donnent deux classes de fonctions qui assurent l'holomorphie de $\hat{f}$ sur certains domaines. On désigne par Π^+ l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}/Im(z) > 0\}$ [1].

Théorème 14 (*Premier théorème de Paley-Wiener*)

1. *Soit $F \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $F \equiv 0$ sur $]-\infty, 0[$. Alors la fonction f définie sur Π^+ par*

$$\forall z \in \Pi^+, f(z) = \int_0^{+\infty} F(t)e^{itz}dt \tag{1}$$

est holomorphe sur Π^+ et ses restrictions aux droites horizontales de Π^+ constituent un sous-ensemble borné de $L^2(\mathbb{R})$.

2. *Réciproquement, soit $f \in H(\Pi^+)$ telle que*

$$\sup_{0<y<+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^2 dx = C < +\infty$$

Alors, il existe $F \in L^2(\mathbb{R}_+)$ telle que

$$\forall z \in \Pi^+, f(z) = \int_0^{+\infty} F(t)e^{itz}dt$$

et

$$\int_0^{+\infty} |F(t)|^2 dt = C$$

Démonstration : 1. Montrons que f est holomorphe sur Π^+.
– $\forall z \in \Pi^+, t \mapsto F(t)e^{itz}$ est mesurable
– $\forall t \in]0, +\infty[, z \mapsto F(t)e^{itz}$ est holomorphe sur Π^+
– Soit K un compact de Π^+. Alors il existe $\delta > 0$ tel que $\forall \in K, Im(z) > \Delta$. On a alors

$$\forall t \in]0, +\infty[\forall z \in K, |F(t)e^{itz}| \leq \underbrace{|F(t)|}_{\in L^2} \underbrace{e^{-\delta t}}_{\in L^2} \in L^1$$

1. ou demi-plan de Poincaré pour les intimes

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Donc d'après le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale, f est holomorphe sur Π^+.
Récrivons maintenant (1) sous la forme,

$$f(x+iy) = \int_0^{+\infty} F(t)e^{-ty}e^{itx}dt$$

Considérons y comme fixé. On a alors d'après le théorème de Plancherel,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+iy)|^2dx &= \int_0^{+\infty}|F(t)|^2e^{-2ty}dy \\ &\leq \int_0^{+\infty}|F(t)|^2dt\end{aligned}$$

Donc, les restriction de f aux droites horizontales de Π^+ constituent un sous ensemble borné de $L^2(]-\infty,+\infty[)$.

2. La fonction F que nous recherchons doit posséder la propriété suivante : $f(x+iy)$ est la transformée de Fourier de $F(t)e^{-yt}$ (où y est considéré comme une constante strictement positive).
Si on utilise la formule d'inversion, la fonction F souhaitée devra être de la forme

$$\begin{aligned}F(t) &= e^{ty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+iy)e^{-itx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int f(z)e^{-itz}dz\end{aligned}$$

où la dernière intégrale est prise sur une droite horizontale de Π^+. La valeur de cette intégrale ne doit pas dépendre du choix d'une droite particulière, ce qui suggère un appel au théorème de Cauchy.
Soit y fixé tel que $0 < y < +\infty$. Pour tout $\alpha > 0$, on définit Γ_α comme le chemin rectangulaire dont les sommets sont $\pm\alpha + i$ et $\pm\alpha + iy$ (faire un dessin).
D'après le théorème de Cauchy, on a :

$$\int_{\Gamma_\alpha} f(z)e^{-itz}dz = 0$$

Soit

$$\Phi(\beta) = \int_{[\beta+i,\beta+iy]} f(z)e^{-itz}dz \text{ pour } \beta \in \mathbb{R}$$

On note $I = (1, y)$.
Alors,

$$\begin{aligned}|\Phi(\beta)|^2 &= |\int_I f(\beta+iu)e^{-it(\beta+iu)}du|^2 \\ &\leq \int_I |f(\beta+iu)|^2du \times \int_I e^{2tu}du \text{ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz}\end{aligned}$$

Définissons maintenant

$$\Lambda(\beta) = \int_I |f(\beta+iu)|^2du$$

Alors,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Lambda(\beta)d\beta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(\int_I |f(\beta+iu)|^2du)d\beta \\ &= \int_I(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(\beta+iu)|^2d\beta)du \text{ par Fubini-Tonelli} \\ &\leq C\lambda(I)\end{aligned}$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
Donc, il existe donc une suite $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ telle que $\alpha_j \to +\infty$ et $\Lambda(\alpha_j) + \Lambda(-\alpha_j) \to 0$.
Comme

$$|\Phi(\beta)|^2 \leq \Lambda(\beta) \times \int_I e^{2u} du$$

On a :

$$|\Phi(\alpha_j)| \leq \Lambda(\alpha_j) \times \int_I e^{2u} du$$

Or $\Lambda(\alpha_j) \geq 0$ et $\Lambda(-\alpha_j) \geq 0$, donc

$$\begin{cases} \Lambda(\alpha_j) & \to 0 \\ \Lambda(-\alpha_j) & \to 0 \end{cases}$$

D'où,

$$\begin{cases} \Phi(\alpha_j) & \to 0 \\ \Phi(-\alpha_j) & \to 0 \end{cases}$$

On remarque par ailleurs, que ceci a lieu pour tout t et que la suite (α_j) ne dépend pas de t.
On pose alors :

$$g_j(y,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha_j}^{+\alpha_j} f(x+iy) e^{-itx} dx$$

Alors,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{\alpha_j}} f(z) e^{-itz} dz \\ &= g_j(y,t)e^{ty} - e^t g_j(1,t) + \underbrace{\Phi(\alpha_j) + \Phi(-\alpha_j)}_{\to 0} \end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{j\to+\infty} \left[e^{ty} g_j(y,t) - e^t g_j(1,t) \right] = 0 \tag{2}$$

et ce pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Notons $f_y(x)$ au lieu de $f(x+iy)$. Par hypothèse, $f_y \in L^2(\mathbb{R})$. Donc, d'après le théorème de Plancherel,

$$\lim_{j\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_y(t) - g_j(y,t)|^2 dt = 0$$

Donc, il existe une sous-suite de $(g_j(y,t))_{j\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\hat{f}_y(t)$ pour presque tout t.
On pose

$$F(t) = e^t \hat{f}_1(t)$$

Grâce à (2), on a alors pour tout $0 < y < +\infty$ et pour presque tout t :

$$F(t) = e^{yt} \hat{f}_y(t) \tag{3}$$

On applique alors le théorème de Plancherel :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2ty} |F(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_y(t)|^2 dt && (4) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_y(x)|^2 dx \leq C && (5) \end{aligned}$$

Si on fait tendre y vers $+\infty$ dans (3), on a grâce à (4), $F(t) = 0$ presque partout sur $]-\infty, 0[$.
Par ailleurs, si on fait tendre y vers 0 dans (4), on obtient

$$\int_0^{+\infty} |F(t)|^2 dt \leq C$$

Enfin,

$$\hat{f}_y(t) = \underbrace{e^{-ty}}_{\in L^2} \underbrace{F(t)}_{\in L^2} \in L^1$$

Donc, $\hat{f}_y \in L^1$.
Comme $f_y \in L^2$, on peut appliquer le théorème d'inversion :

$$f_y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_y(t) e^{itx} dt$$

ou encore

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_0^{+\infty} F(t) e^{-yt} e^{itx} dt \\ &= \int_0^{+\infty} F(t) e^{itz} dt \end{aligned}$$

■

Théorème 15 (*Deuxième théorème de Paley-Wiener*)

1. *Soit $0 < A < +\infty$ et $F \in L^2([-A, A])$. Alors la fonction f définie sur $\mathbb{C}$ par*

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = \int_{-A}^{A} F(t) e^{itz} dt$$

est une fonction entière qui vérifie

$$\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq \int_{-A}^{A} |F(t)| dt e^{A|z|}$$

et dont la restriction à l'axe réel appartient à L^2.

2. *Réciproquement, soient A et C deux constantes positives, et soit f une fonction entière telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$,*

$$|f(z)| \leq Ce^{Az}$$

On suppose aussi que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty$$

Alors, il existe une fonction $F \in L^2([-A, A])$ telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = \int_{-A}^{A} F(t) e^{itz} dt$$

Démonstration : Rudin, théorème 19.3p421 ■

2.3 Lemme de Schwarz et applications

Lemme 1 (*Lemme de Schwarz*)

Soit $f \in H(D(0,1))$ telle que $f0) = 0$ et $|f(z)| < 1$ pour tout $z \in D(0,1)$. Alors on a :

1. $\forall z \in D(0,1), |f(z)| \leq |z|$
2. $|f'(0)| \leq 1$ *En outre, si* $|f'(0)| = 1$ *ou s'il existe* $z \in D(0,1) \setminus \{0\}$ *tel que* $|f(z)| = |z|$, *alors il existe* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tel que* $|\lambda| = 1$ *et* $f(z) = \lambda z$ *pour tout* $z \in D(0,1)$.

Démonstration : Tauvel, théorème 7.3.1p87 ■

Définition 5

Soient U et V des ouverts de $\mathbb{C}$. Un isomorphisme analytique de U sur V est une bijection de f sur U telle que $f \in H(U)$ et $f^{-1} \in H(V)$. On note $Isom(U,V)$ l'ensemble des isomorphismes analytiques de U sur V et $Aut(U) = Isom(U,U)$. Un élément de $Aut(U)$ est appelé un automorphisme de U.

Remarque 1

Si U et V sont isomorphes, alors ils sont homéomorphes. La réciproque est fausse, comme le montre le contre-exemple suivant :

Proposition 5

Les ensembles $\mathbb{C}$ et $D(0,1)$ sont homéomorphes mais non isomorphes.

Démonstration : *Tauvel, 7.3.2p87* ■

Si $a \in D(0,1)$, on définit $\varphi_a : D(0,1) \to \mathbb{C}$ par :

$$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

On remarque que φ_a est encore défini si $|z| = 1$, et que si $t \in \mathbb{R}$:

$$|\varphi_a(e^{it})| = |\frac{e^{it}-a}{e^{-it}-\bar{a}} = 1$$

On a alors $\varphi_a(D(0,1)) \subset D(0,1)$. Et on vérifie immédiatement que $\varphi_a \circ \varphi_{-a} = Id$. Donc, $\varphi_a \in Aut(D(0,1))$.

Théorème 16

L'ensemble $Aut(D(0,1))$ est constitué des applications $\lambda\varphi_a$, avec $|\lambda| = 1$ et $a \in D(0,1)$.

Démonstration : Tauvel, théorème 7.3.3p88 ■

Théorème 17

Soit $P = \{z \in \mathbb{C}/Re(z) > 0\}$. L'ensemble $Aut(P)$ est constitué des applications

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

avec $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ et $ad - bc > 0$.

Démonstration : Tauvel, théorème 7.3.5p88 ■

Pour plus de précisions sur cette partie et son intérêt, on peut lire les quelques lignes dans Objectif Agrégation page 60, sur le problème de la représentation conforme. Le résultat fondamental étant le théorème de la représentation conforme de Riemann. On peut en trouver la démonstration dans Rudin, théorème 14.8p330. On rappelle pour information son énoncé, il est bon de le savoir mais dangereux de la mettre dans un plan (démonstration difficile et théorie non triviale autour).
Avant toute chose, il est nécessaire de rappeler quelques définitions sur la notion d'homotopie et de simple connexité.

Définition 6

1. *Deux courbes fermés γ_1 et γ_2 dans Ω, ayant même origine a et même extrémité b sont dits homotopes dans Ω s'il existe une application continue H de $[0,1] \times [0,1]$ dans Ω telle que*
   - $\forall t \in [0,1], H(t,0) = \gamma_1(t)$ *et* $H(t,1) = \gamma_2(t)$.
   - $\forall u \in [0,1], H(0,u) = H(1,u)$

   S'il en est ainsi, on dit que H est une homotopie de γ_1 à γ_2. Le sens intuitif est que γ_1 peut être continument déformé en γ_2.
2. *Si une courbe fermée γ_1 est homotope à une application constante, on dit que γ_1 est d'homotopie nulle dans Ω.*
3. *Si Ω est connexe, et si toute courbe fermée est d'homotopie nulle dans Ω, on dit que Ω est simplement connexe.*

Théorème 18 (*Théorème de représentation conforme de Riemann*)

Tout ouvert simplement connexe Ω du plan (autre que le plan lui même) est conformément équivalent au disque unité ouvert. Autrement dit, $Isom(\Omega, D(0,1)) \neq \emptyset$.

3 Fonctions méromorphes

3.1 Singularités

Soit une fonction holomorphe sur un ouvert Ω ayant un "trou". On veut expliquer le comportement de f en tenant compte de ce "trou" et pour cela donner un développement de f avec des fonctions simples qui font intervenir le "centre du trou". Les séries entières ne suffisent plus et on introduit les séries de Laurent.

Théorème 19 (*Développement en série de Laurent*)

Soit f une fonction holomorphe sur une couronne $K(a, \rho_1, \rho_2)$ avec $0 \leq \rho_1 < \rho_2 \leq +\infty$. Alors f est développable en série de Laurent dans cette couronne : il existe une famille de nombres complexes $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que

$$\forall z \in K(a, \rho_1, \rho_2), f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n$$

De plus, la convergence est normale sur tout compact de la couronne.

Démonstration : Objectif Agrégation, théorème 2.27p65 ■

Définition 7

Soient f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω et $a \notin \Omega$. On dit que a est une singularité isolée de f s'il existe $\rho > 0$ tel que $K(a, 0, \rho) \subset \Omega$.

On s'intéresse au comportement de la fonction f dans un voisinage de a. Le développement en séries de Laurent dans $K(a, 0, \rho)$ nous amène à distinguer trois types de singularités isolées.

Définition 8

- *Si pour tout $n < 0$, $a_n = 0$, alors a est une singularité artificielle.*
- *S'il existe $N > 0$ tel que pour tout $n < -N$, $a_n = 0$ et $a_{-N} \neq 0$, alors a est un pôle d'ordre N.*
- *S'il existe une infinité de $n < 0$ tel que $a_n \neq 0$, alors est un singularité essentielle.*

Exemple 6

La fonction $z \mapsto exp(1/z)$ admet en 0 une singularité essentielle.

Démonstration : Objectif Agrégation, exemple 2.29p66 ■

Définition 9

Une fonction f est méromorphe sur un ouvert Ω s'il existe un ensemble $A \subset \Omega$ tel que :

1. *A n'a pas de point d'accumulation dans Ω.*
2. *$f \in H(\Omega \setminus A)$.*
3. *Chaque point de A est un pôle pour f.*

On note $M(\Omega)$ l'ensemble des fonctions méromorphes sur Ω.

Remarque 2

On exclut pas la possibilité $A = \emptyset$. En particulier, toute fonction holomorphe sur Ω est méromorphe sur Ω.

Proposition 6

On suppose Ω connexe. Si $g, h \in H(\Omega) \setminus \{0\}$, alors $g/h \in M(\omega)$.

Démonstration : Tauvel, 8.3.2p101 ■

Proposition 7

Si Ω est connexe, alors l'ensemble $M(\Omega)$ est un corps.

Démonstration : Tauvel, proposition 8.3.4p101 ■

Théorème 20

Soit (f_n) une suite de fonctions méromorphes sur Ω telle que pour tout compact $K \subset \Omega$, $\exists N_K$ tel que $\forall n \geq N_K$, les f_n n'ont pas de pôle dans K et que, $\sum_{n \geq N_K} f_n$ converge uniformément sur K. Alors la somme de cette série est méromorphe sur Ω et on peut dériver la série terme à terme.

Démonstration : Objectif Agrégation, théorème 2.42p71

L'hypothèse permet d'isoler les pôles sur tout compact dans une somme finie et de traiter le reste comme une conséquence du théorème de Weierstrass. ■

Application :

DÉVELOPPEMENT :Prolongement méromorphe de Γ sur $\mathbb{C}$

Proposition 8

Considérons la fonction Γ d'Euler définie sur $\mathcal{P} = \{z/Re(z) > 0\}$ par

$$\Gamma : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \end{array}$$

> *La fonction Γ est holomorphe sur $\mathcal{P}$ et se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.*

Démonstration : Γ est holomorphe sur $\mathcal{P}$. En effet :
- $\forall z, t \mapsto e^{-t}t^{z-1}$ est mesurable sur $\mathbb{R}_+$.
- $\forall t, z \mapsto e^{-t}t^{z-1}$ est holomorphe sur $\mathcal{P}$.
- Soit K un compact de $\mathcal{P}$. On a $Re(z) \in [\varepsilon, M]$, pour tout $z \in K$ pour un certain $\varepsilon > 0$ et un $M > 0$. D'où, pour tout $z \in K$:

$$\begin{aligned} |e^{-t}t^{z-1}| &\leq e^{(\varepsilon-1)\ln(t)} = \frac{1}{t^{1-\varepsilon}} \text{ si } t \in]0,1] \\ &\leq t^{M-1}e^{-t} \text{ si } t \geq 1 \end{aligned}$$

  et ces deux fonctions sont intégrables.

On peut alors appliquer le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale pour en déduire l'holomorphie de Γ sur $\mathcal{P}$.
Montrons que pour tout $z \in \mathcal{P}$:

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$$

On a :

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt + \int_1^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$$

On écrit alors :

$$e^{-t}t^{z-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}$$

et on va essayer d'intervertir somme et intégrale dans

$$\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}dt$$

Il suffit pour cela de montrer que

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} |\frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}|dt < +\infty$$

Or,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}| = t^{Re(z)-1}e^t$$

Comme $Re(z) > 0$ sur $\mathcal{P}$, $t \mapsto t^{Re(z)-1}e^t$ est intégrable et on obtient d'après le théorème de Fubini que :

$$\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$$

Montrons maintenant que $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et ses pôles sont les entiers négatifs ou nuls, et ils sont simples.
- Pour tout n, $f_n : z \mapsto \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec pour seul pôle simple l'entier $-n$.
- Soit K un compact de $\mathbb{C}$: il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset \bar{D}(0, N)$ et $\forall n > N$, f_n n'a pas de pôle dans K. De plus,

$$\forall z \in K, |z+n| \geq n - |z| \geq n - N$$

Donc,

$$\forall z \in K, |f_n(z)| \leq \frac{1}{n!(n-N)}$$

Et donc, on peut appliquer le théorème de méromorphie sous le signe somme car $\sum_{n>N} f_n$ est normalement convergente sur K.

Donc, f est ine fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, ses pôles simples étant les entiers négatifs.
On peut maintenant conclure quant au prolongement de Γ en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.
On applique le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale.

$$\forall t \geq 1, z \mapsto \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier. Alors,

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

établit une prolongement méromorphe de la fonction Γ sur $\mathbb{C}$.
Le théorème de prolongement analytique entraîne de plus que c'est le seul prolongement analytique de Γ sur l'ouvert connexe $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$. ■

3.2 Théorème des résidus et applications

Théorème 21 (*Théorème des résidus*)

Soient Ω un ouvert convexe de $\mathbb{C}$, $a_1, ..., a_n$ des points deux à deux distincts de Ω et $f \in H(\Omega \setminus \{a_1, ..., a_n\})$. On suppose que chaque a_k est un pôle de f. Si γ est un chemin fermé dans Ω dont l'image ne contient aucun des a_k, alors on a :

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} Ind_\gamma(a_k) Res(f, a_k)$$

où $Res(f, a_k)$ correspond au développement c_{-1} de f en série de Laurent en a_k.

Démonstration : Tauvel, théorème 8.4.3p103 ■

Application :

1. Calcul d'intégrale :

   Proposition 9 (*Intégrale de Fresnel*)

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1+i)$$

2. Dénombrement des zéros :

   Théorème 22 (*Théorème de Rouché*)

   Soient Ω un ouvert convexe de $\mathbb{C}$, $f, g \in H(\Omega)$ et γ un chemin fermé dans Ω. On suppose *vérifiées les conditions suivantes :*

(a) *f (resp. g) n'a qu'un nombre fini $a_1, ..., a_m$ (resp. $b_1, ..., b_n$) de zéros dans Ω comptés av*
leur multiplicité.

(b) *Pour tout $z \in \gamma^*$, on a $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$.*

Alors :

$$\sum_{k=1}^{m} Ind_{\gamma}(a_k) = \sum_{j=1}^{n} Ind_{\gamma}(b_j)$$

Démonstration : Tauvel, théorème 8.6.2p106 ■

Corollaire 5

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$ et $r > 0$ tels que $D'(a, r) \subset \Omega$. Soient $f, g \in H(\Omega)$ vérifiant $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ pour tout $z \in C(a, r)$. Alors f et g ont même nombre de zéros (comptés avec leur multiplicité) dans $D(a, r)$.

Démonstration : Tauvel, corollaire 8.6.3p107 ■