Développement: Groupe des K-automorphismes de $K(X)$

Adrien Fontaine

5 septembre 2013

Référence : Szpirglas

Définition 1

On appelle K-automorphisme de $K(X)$ un automorphisme du corps $K(X)$ qui est l'identité sur K et on note $Aut_K(K(X))$ l'ensemble formé par ces automorphismes.

On note $PGL_2(K)$ le quotient de $GL_2(K)$ par le sous-groupe distingué des homothéties. Le groupe $Aut_K(K(X))$ est relié à $PGL_2(K)$ par le théorème suivant :

Théorème 1

$Aut_K(K(X))$ est isomorphe à $PGL_2(K)$). Plus précisément, l'application qui à une matrice $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ de $GL_2(K)$ associe la substitution $\sigma_M : F \mapsto F\left(\frac{dX-b}{-cX+a}\right)$ définit un morphisme de groupes

$$\begin{array}{cccc} \sigma & : & GL_2(K) & \to & Aut_K(K(X)) \\ & & M & \mapsto & \sigma_M \end{array}$$

qui se factorise en un isomorphisme $PGL_2(K) \to Aut_K(K(X))$.

Démonstration : Tout d'abord, il est clair que l'application σ envoie la matrice identité sur l'application identique de $K(X)$. Ensuite, considérons le produit de matrices

$$MM' = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{bmatrix}$$

Il lui est associé la substitution $\sigma_{MM'}$ qui a pour action

$$F \mapsto F\left(\frac{(cb' + dd')X - ab' - bd'}{-(ca' + dc')X + aa' + bc'}\right)$$

Par ailleurs,

$$\sigma_{M'}(F) = F\left(\frac{d'X - b'}{-c'X + a'}\right)$$

et

$$\sigma_M(\sigma_{M'}(F)) = F\left(\frac{d'\frac{dX-b}{-cX+a} - b'}{-c'\frac{dX-b}{-cX+a} + a'}\right) = F\left(\frac{(dd' + cb')X - (bd' + ab')}{-(dc' + ca')X + (bc' + aa')}\right)$$

D'où,

$$\sigma_{MM'} = \sigma_M \circ \sigma_{M'}$$

En particulier,

$$\sigma_M \circ \sigma_{M^{-1}} = \sigma_{M^{-1}} \circ \sigma_M = \sigma_{Id} = Id_{K(X))}$$

ce qui montre que σ_M est un K-automorphisme de $K(X)$. De plus, σ est un morphisme de groupes. Montrons désormais que ce morphisme se factorise en un isomorphisme $PGL_2(K) \to Aut_K(K(X))$. Pour cela on va d'abord montrer que le noyau de ce morphisme est le groupe des homothéties, puis que ce morphisme est surjectif.

- $Ker(\sigma) = \{\lambda Id, \lambda \in K\}$:
  Il est clair que $\sigma_{\lambda Id} = Id_{K(X)}$ pour tout $\lambda \in K^*$.
  7 Réciproquement, si $\sigma_M = Id_{K(X)}$, alors en particulier
  $$X = \frac{dX - b}{-cX + a}$$
  Donc,
  $$-cX^2 + aX = dX - b$$
  et cette égalité entre polynômes implique $b = c = 0$ et $a = d$, donc M est une homothétie.
- σ est surjectif :
  Soit $\varphi : K(X) \to K(X)$ un K-automorphisme de corps. La fraction rationnelle $A = \varphi(X)$ détermine entièrement φ, car, d'après les propriétés d'un K-automorphisme de corps, pour toute fraction rationnelle $F = F(X)$, on a
  $$\varphi(F(X)) = F(\varphi(F(X)) = F(A)$$
  Intéressons nous maintenant au sous-anneau $K[A]$ et au sous-corps $K(A)$ de $K(X)$ engendré par A.
  On a les inclusions suivantes :
  $$K \subset K(A) \subset K(X)$$
  En fait, $K(A) = K(X)$, puisque c'est l'image de φ, qui est bijectif.
  En particulier, A est non constante.
  On peut donc écrire $A = \frac{P}{Q}$ où P et Q sont des polynômes en X non nuls et premiers entre eux.
  Introduisons une nouvelle indéterminée T et le polynôme non nul $\Phi = Q(T)A - P(T) \in K[A][T]$.
  On peut voir Φ comme un polynôme en T à coefficients dans $K(A)$, de degré $n = \max(deg(P), deg(Q))$, qui annule X (par définition de A).
  Ainsi, X est algébrique sur $K(A)$, donc $K(X)$ est de dimension finie sur $K(A)$. En particulier, $K(A)$ est de dimension infinie sur K (par multiplicativité des degrés) et est donc isomorphe à un corps de fractions rationnelles en une indéterminée. Par suite, $K[A]$ est isomorphe à un anneau de polynômes en une indéterminée.
  Vu comme polynôme en A à coefficients dans $K(T)$, le polynôme Φ est irréductible car de degré 1. De plus, Φ est en fait à coefficients dans l'anneau factoriel $K[T]$, et son contenu est 1, par choix de la fraction irréductible $A = \frac{P}{Q}$.
  D'après le théorème de Gauss, Φ est un irréductible de $K[T][A]$, donc de $K[A][T]$, donc de $K(A)[T]$. Donc, c'est le polynôme minimal de X sur $K(A)$, donc la dimension de $K(X)$ comme $K(A)$-espace vectoriel est égale à n. Comme $K(A) = K(X)$, on trouve $n = 1$.
  Donc, P et Q sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 1, que l'on peut écrire $P = dX - a$ et $Q = -cX + a$ pour certains $a, b, c, d \in K$. Comme A est non constante, on voit que $ad - bc \neq 0$, et ainsi $\varphi = \sigma_M$ pour $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. ∎